COSMOGRAPHIÆ

PHYSICÆ, ET MATHEMATICÆ

PARS PRIOR.

COSMOGRAPHIÆ
PHYSICÆ, ET MATHEMATICÆ
PARS PRIOR
MOTUUM PERIODICORUM
THEORIAM CONTINENS.



MEDIOLANI EX TYPOGRAPHIA JOSEPHI MARELLI.

10

EUROPÆ LITTERARIÆ DELECTUI
ACADEMIIS ET SOCIETATIBUS SCIENTIARUM
LONDINENSI PARISIENSI
BONONIENSI BEROLINENSI HAVNIENSI
PETROPOLITANÆ HOLMIENSI HARLEMENSI
COLLEGIS SUIS HUMANISSIMIS
SAPIENTISSIMIS CELEBERRIMIS
PAULLUS FRISIUS
THEORIAM HANC
PERIODICI MOTUS LUNÆ
ALIORUMQUE CÆLESTIUM CORPORUM
IN PUBLICUM OBSERVANTIÆ
ET SUI ERGA IPSOS STUDII
MONUMENTUM.

INDEX TOTIUS OPERIS.

CAP.

IN-

INTRODUCTIO.

I. UNiversæ theoriæ motus primordia debemus Galilæo. Archimedes enim in duobus libris de æquiponderantibus, & de iis, quæ vehuntur in fluido, ab æquilibrii legibus exorsus centri gravitatis considerationem in Mechanicam invexit, & æquilibrium haberi ostendit ubi distantiæ a puncto suspensionis essent reciproce ut pondera suspensa, atque insuper differentiam specificorum ponderum observare cœpit, & universim docuit quæ solida corpora in fluidis posita descendere ad fundum vasis, & quæ, quaque sui parte superinnatare debeant. Ab Archimede ad Galilæum usque vix quidpiam hacce in re adjectum est, nisi quod Stevinus observaverat, fluidorum pressionem in fundum vasis exercitam esse in ratione composita basis, & altitudinis. Galilæus in sermone de corporibus fluido insidentibus Archimedis theoremata ab objectis omnibus vindicavit, & casus omnes solidorum corporum in fluidis descendentium, aut superinnatantium evolvit: in dialogis autem de Mechanica, & motu locali, æquabilis, accelerati, & retardati motus notiones distincte exposuit, phænomena experimentis investigare cœpit, priores, ac præcipuas leges ostendit, & generalia principia tradidit, quibus problemata ejusdem generis omnia resolvi possunt.

II. Leges motus æquabilis a Galilæo exhibitæ prioribus sex theorematis tertii dialogi ad unicam formulam breviter reducuntur. Primo enim ex ipsa uniformis motus notione manifestum est duplo tempore duplum spatium, & triplo triplum absolvi, atque ita in qualibet multiplicium, & submultiplicium serie spatium æquabiliter absolutum tempore T esse ad spatium, quod idem corpus eadem cum velocitate V absolvet tempore alio quocumque t in ratione simplici temporum T, & t. Deinde cum velocitas sit ea corporis moti affectio, qua fit ut majus, vel minus spatium ab ipso corpore, dato aliquo tempore, absolvatur; manifestum est etiam quod spatium tempore t, & velocitate V absolutum, erit ad spatium absolutum eodem tempore cum velocitate alia v in ratione simplici velocitatum V, & v. Quare compositis rationibus

 spa-

ſpatium S tempore T, & velocitate V abſolutum, erit ad ſpatium s abſolutum tempore t, & velocitate v, in ratione temporum ſimul, & velocitatum : ſive erit $S : s = TV : tv$, adeoque etiam $V : v = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, & $T : t = \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$, eruntque velocitates in ratione directa ſpatiorum, & reciproca temporum, & viciſſim tempora in ratione ſpatiorum directa, & reciproca velocitatum.

III. Principia etiam, a quibus Galilæus in theorematis aliis ſubſequentibus accelerati, ac retardati motus tractationem exorſus eſt, binis formulis facile poſſunt exprimi. Nam ſi appelletur G ea vis omnis, quæ ad accelerandum, aut retardandum corpus impenditur, & inde orta differentia exigua velocitatis, ſive elementum velocitatis creſcentis, aut decreſcentis ſit dV, & elementum temporis, quo gignitur variatio hujuſmodi, ſit dT, eodem ordine oſtendi poterit variationem eſſe proportionalem & vi, & tempori, quo gignitur, ſive eſſe in motu quidem accelerato $G.dT = dV$, in retardato autem $G.dT = -dV$. At inſuper quia minimo quocumque tempore motus omnis veluti æquabilis, & uniformis ſpectari poteſt, in motu autem æquabili ſpatia ſunt in ratione compoſita totarum velocitatum, & temporum, quibus deſcribuntur, iiſdem poſitis denominationibus erit elementum ſpatii $dS = V.dT$, ſive $dT = \frac{dS}{V}$. Subſtituto igitur in priori formula valore ipſius dT altera habebitur variabilis motus formula $G.dS = \pm V.dV$. Generatim etiam cum ſit $V = \frac{dS}{dT}$, ſi elementum temporis cenſeatur conſtans, ſumptis elementis aliis, ſolita ſcribendi ratione erit $dV = \frac{ddS}{dT}$, & prior eadem formula in hanc aliam convertetur $G.dT^2 = \pm ddS$.

IV. Ita igitur, imminutis ultra menſuram quamlibet propoſitam temporibus, priores motuum variabilium formulæ ex legibus motus æquabilis illico colliguntur. Eæ vero ſatis indicant quibus legibus corpora gravia libere deſcendant. Nam ſi corpus ſibi relictum deſcendat in recta AB, fig. 1., & ſpatium percurſum AC vocetur S, tempus deſcenſus T, velocitas acquiſita V, gravitas acceleratrix G,

ac

ac fint elementa fpatii, temporis, & velocitatis dS, dT, dV; in primis pofito $G.dT = dV$, cum gravitas continue corpus, & æqualiter ad defcenfum follicitet, æqualibus elementis temporis æqualia habebuntur incrementa velocitatis, hoc eft corpus defcendet motu uniformiter accelerato. Deinde fummis elementorum omnium acceptis, fi motus a quiete incipiat, & defcenfus initio conftans nulla addi debeat, erit $G.T = V$, nimirum velocitates univerfim erunt in ratione compofita gravitatis acceleratricis, & temporum defcenfus. Pofito infuper $G.dS = V.dV$, & fummis rurfus acceptis, erit $G.S = \frac{1}{2} V^2$: fcilicet velocitates libero lapfu acquifitæ erunt in ratione fubduplicata gravitatis ipfius acceleratricis, fpatiorumque poft defcenfus initium defcriptorum. Denique cum ob priorem formulam effe debeat $T = \frac{V}{G}$, five $VT = \frac{V^2}{G} = 2S$, & & juxta alteram formulam fit $\frac{V^2}{G} = 2S$; fpatium, quod æquabiliter abfolvi poffet tempore T; & data femper cum velocitate V, quæ in fine ejufdem temporis motu uniformiter accelerato adipifcitur, duplum erit illius fpatii, quod libero defcenfu, & motu uniformiter accelerato æquali alio tempore abfolvitur. Motu furfum converfo fiet $G.dT = -dV$, & $G.dS = -VdV$, eademque fpatia abfolventur contrario ordine, & corpus ad eamdem, unde motus incœperat, altitudinem redibit.

V. Hifce autem pofitis cum fpatia fint ut quadrata velocitatum, five etiam ut quadrata temporum, fi tempora defcenfus fint 1, 2, 3, 4 &c., erunt fpatia percurfa, & a defcenfus initio fupputata 1, 4, 9, 16 &c., & antecedens fpatium a pofteriore quolibet fubducendo, fpatia æqualibus temporis partibus fibi proxime fuccedentibus libero lapfu abfoluta inter fe erunt ut numeri impares 1, 3, 5, 7 &c. Id experimentis optime refpondet. Demiffis enim ex altitudine Parifienfis obfervatorii pluribus corporibus compertum eft uno minuto fecundo temporis abfolvi pedes parifienfes 15. dig. 1. lin. $2\frac{1}{18}$: ac deinde fecundo altero ped. 45. dig. 3. lin. $6\frac{1}{2}$: ac tertio fubfequenti ped. 75. dig. 5. lin. $10\frac{5}{18}$. Id ipfum Galilæus

non nisi in planis inclinatis potuit deprehendere. Cum enim in canaliculo tereti, & inclinato ad horizontem eburneum globulum demisisset, expertus est longitudinem trium brachiorum, ac deinde brachiorum novem paribus temporis partibus sibi succedentibus absolvi. Demissis autem ex Pisana turri corporibus diversi generis adnotavit potissimum Galilæus differentiam temporum totius descensus tam parvam esse, ut variæ aeris resistentiæ debeat omnino tribui. Quod inventa a Guerickio antlia pneumatica innotuit accuratius. Etenim rarefacto intus aere, & plumulæ, & auri frustula eodem omnino tempore ex paribus altitudinibus dilabuntur. Inde collegerat Galilæus gravitatem acceleratricem in corporibus terrestribus æqualem esse, & summam gravitatum omnium in singulis particulis esse quantitati materiæ cujusque corporis proportionalem.

VI. Eædem formulæ in quacumque alia gravitatis variabilis hypothesi inveniendis descensus legibus æque inservient. Sed duæ in primis hypotheses occurrunt considerandæ, quæ in natura habent locum, gravitatis, aut simplicibus distantiis directe, aut quadratis distantiarum reciproce proportionalis. Prima enim infra Planetarum superficies descendendo, altera in spatiis cælestibus locum habet. Pro utraque hypothesi leges corporum descendentium per lineam rectam ex legibus corporum in ellipsibus motorum ingeniose eruit Newtonus in Propos. 33., 36., & 38. Lib. 1. Princip. Mathem. Aliæ eorumdem problematum solutiones apud Grandium in notis ad Galilæum, & apud authores alios occurrunt. Sic vero ad Galilæi formulas problemata facile reducuntur. Sit centrum virium C, fig. 2., & gravitas acceleratrix in loco B sit proportionalis distantiæ BC, ac si in distantia illa a centro, quæ unitate exprimatur, gravitas eadem vocetur G, posita $BC = X$, & $Bb = -dX$, in loco quocumque B sit gravitas $= G.X$. Scribendo G.X loco G, & $-dX$ loco dS, fiet $VdV = -G.X.dX$, & summam omnium accipiendo juxta vulgares calculi integralis regulas erit $\frac{1}{2}V^2$ æqualis ipsi $-\frac{1}{2}G.X^2$, addita constanti aliqua quantitate C: & quia descensus ex quiete incipit in loco A, ibique evadit $C - \frac{1}{2}G.X^2 = C - \frac{1}{2}G.AC^2 = 0$; fiet universim pro loco qualibet $V^2 = G.\overline{AC^2 - BC^2}$.

VII.

VII. Primo igitur si centro C, & radio AC describatur circularis arcus AD, velocitas descensus ex A in B proportionalis erit semiordinatæ BM. Tempus autem descensus per Bb cum sit directe ut spatium ipsum Bb, & reciproce ut velocitas BM, ob

$Mm = \frac{AC.\,Bb}{BM}$, erit ut quantitas $\frac{Mm}{AC}$, sive ut angulus MCm:

& totum tempus descensus ex A in B proportionale erit angulo ACM. Et quia in eodem circulo arcus AM proportionales sunt angulis ACM, descripto ut antea quadrante AD, & continuato corporis descensu, cum spatia descripta sint ipsæ abscissæ AB, erunt tempora, & velocitates ut arcus AM, & semiordinatæ BM. Et quia insuper semiordinatæ arcuum nascentium proportionales sunt ipsis arcubus, corporis motus initio erit uniformiter acceleratus, & proxime ad centrum motus desinet in æquabilem, atque ultra delato corpore, & continuato motu ex adversa parte exprimentur velocitates semiordinatis alterius quadrantis, & corpus usque ad alterum diametri verticem perveniet.

VIII. Si descensus ex A inciperet, & gravitas acceleratrix constanter esset G. AC, juxta §. IV. velocitas descensus in loco B esset in ratione subduplicata quantitatis 2G. AC. AB. Velocitas igitur descensus in hypothesi gravitatis constantis erit ad velocitatem in hypothesi gravitatis proportionalis simplici distantiæ a centro ut $\sqrt{2AC.\,AB}$: BM, sive ut subtensa arcus AM ad sinum rectum BM: ultimæ autem velocitates cadendo usque ad centrum C acquisitæ inter se erunt in ratione subduplicata binarii ad unitatem. Quod si denique in eadem hypothesi gravitatis decrescentis in simplici ratione imminutæ distantiæ a centro comparentur inter se corpora cadentia ex diversis altitudinibus A, & H, tempora descensuum per spatia AB, HL erunt directe ut arcus AM, HN, & reciproce ut altitudines totæ AC, HC: & cum similes arcus sint radiis proportionales, æqualia erunt tempora descensus ad centrum usque, undecumque incipiat descensus. Exæquatis etiam temporibus habebuntur similes arcus AM, HN, & similia segmenta ABM, HLN, adeoque spatia AB, HL æqualibus temporibus percursa proportionalia erunt velocitatibus BM, LN.

IX. Sit modo gravitas acceleratrix reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus gravitas ipsa in loco quocumque B exprimatur quantitate

titate $\frac{G}{X^2}$. Erit $V\,dV = -\frac{G.\,dX}{X^2}$, & ſummis de more acceptis $\frac{1}{2}V^2$ æquabitur quantitati variabili $\frac{G}{X}$ adjecta conſtanti C, in quam abit initio motus prior illa quantitas. At quia velocitas deſcenſus in loco A nulla eſſe debet, poſito $X = AC$, fiet $\frac{1}{2}V^2 = C + \frac{G}{AC} = 0$, ſive erit eadem conſtans $C = -\frac{G}{AC}$. Itaque generatim erit $\frac{1}{2}V^2 = \frac{G}{X} - \frac{G}{AC} = \frac{G.\,AB}{AC.\,BC}$, ſive, ob conſtantes G, & AC, erit velocitas in ratione ſubduplicata ſpatii percurſi AB directe, & reciproce in ratione ſubduplicata ſpatii reſidui BC. Quod ſi ſupra rectam AC, fig. 3., deſcribatur ſemicirculus ANC, & ſit BN ſemiordinata in puncto B, junganturque chordæ AN, CN, erit $AB = \frac{AN^2}{AC}$, & $BC = \frac{CN^2}{AC}$, ac velocitas deſcenſus in loco B erit ut $\frac{AN}{CN}$, ac etiam ut $\frac{AB}{BN}$.

X. Quia gravitas acceleratrix in loco A ſit $\frac{G}{AC^2}$, ſi ipſius quantitas maneret conſtanter eadem, eſſet quadratum velocitatis in loco $B = \frac{2G.\,AB}{AC^2}$: adeoque velocitas in hypotheſi gravitatis conſtantis erit ad velocitatem pari deſcenſu acquiſitam in hypotheſi gravitatis diſtantiarum quadratis reciproce proportionalis in ratione ſubduplicata BC : AC, ſive in ratione ſimplici CN : AC. In poſteriori etiam hac hypotheſi velocitas deſcenſus in centro C fiet major quacumque data, & corpore in adverſam partem continuata directione juxta eamdem lineam rectam delato imminuetur contrariis gradibus velocitas, exprimeturque analogis ſubtenſis ſemicirculi alterius juxta poſiti. Et cum quantitas $\frac{G}{X^2}$ ſemper poſitiva ſit, atque, in hac hypotheſi gravitatis, contrariæ ipſius directiones citra, &

& ultra centrum unica formula nequeant exprimi, pro exprimenda etiam descensus, & ascensus velocitate similiter utrobique geminanda erit constructio. Inde oritur ea paradoxi species, quam analytica velocitatis expressio videtur exhibere in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet potentiæ distantiarum ordine pari. Eam primo attigit Eulerus in Prop. 32. Mechanicæ, ac deinde authores alii fusius exposuerunt. Vere tamen paradoxi species nulla est: cum enim secunda, quarta, & pares aliæ potestates cujuslibet quantitatis positivæ sint, physica lex gravitatis, quæ citra, & ultra centrum in partes adversas tendit, analytice nequit exprimi, & bini casus corporum descendentium, & ascendentium ultra centrum unica formula exponi nequeunt.

XI. Si fiat $AC = 1$, & gravitas etiam acceleratrix G ad eamdem distantiam accipiatur pro unitate, erit velocitas descensus ex A in $B = \frac{AN}{CN} . \sqrt{2}$, & tempus descensus per elementum spatii Bb erit $= \frac{CN.Bb}{AN.\sqrt{2}}$. Quare si ducatur chorda Cn, & ex n in CN ducatur perpendiculum no, ut sint similia triangula Non, ANC, adeoque sit $Nn = \frac{AC.on}{CN}$, & $Bb = \frac{2BN.Nn}{AC} = \frac{2BN.on}{CN}$, tempus idem descensus per Bb æquale erit quantitati $\frac{BN}{AN}.on.\sqrt{2}$, sive $\frac{CN}{AC}.on.\sqrt{2}$, & proportionale areæ NCn. Tempus autem totius descensus ex A in B proportionale erit toti areæ ACN, seu summæ sectoris circularis AFN, & trianguli CFN: & cum sit sector $AFN = \frac{1}{2}$ FC.AN, & triangulum $CFN = \frac{1}{2}$ FC.BN, ob notam cycloidis proprietatem, tempus descensus ex A in B proportionale erit semiordinatæ, quam in punto B haberet cyclois verticis A, & altitudinis AC. Totum etiam tempus descensus ex A in C æquale erit semicirculo $ANnC$ ducto in $\frac{2\sqrt{2}}{AC}$, vel semiperipheriæ $ANnC$ divisæ per $\sqrt{2}$, aut quadranti AMD per $\sqrt{2}$ pariter diviso.

KII.

XII. Simili modo aliæ leges corporum juxta eamdem vis impellentis directionem motorum ex priori Galilæi formulis possunt repeti. Ut motum corporum aut in plano aliquo dato descendentium, aut juxta directionem quamlibet projectorum determinaret Galilæus principium aliud compositionis, & resolutionis virium, ac motuum addidit in scholio Theor. II. de motu accelerato, & in Theor. II. de motu projectorum. Principium hujusmodi est: si corpori in puncto A, fig. 7., binæ vires imprimantur secundum quascumque rectas AG, AE, & motus, ac velocitates inde ortæ sint rectis ipsis proportionales, completo parallelogrammo AGCE, binæ vires unicam vim component, quæ exprimetur diagonali AC: & viciffim vis, quæ exprimatur diagonali AC, resolvi poterit in duas alias, quæ exprimantur lateribus AG, AE. Newtonus principii ipsius veritatem inde patere censuit quod cum mutatio status fieri semper debeat juxta eamdem directionem, qua imprimitur vis motrix, motus omnis accedendi ad rectam GC genitus vi AG turbari nequit ob aliam vim AE. Daniel Bernoullius T. I. Acad. Petropolitanæ id ipsum ex eo tantum axiomate collegit, quod si quæ vires in æquilibrio sint inter se, earum etiam æquimultiplices in æquilibrio esse debent. Demonstrationes alias addiderunt authores alii, nonnulli etiam difficultates, ac dubia in primis hisce motus notionibus proposuerunt. Facile autem ostendi potest compositionis, & resolutionis principium manifestum esse quando angulus directionis virium est rectus, & casus alios anguli acuti, obtusique ad casum anguli recti Geometrice reduci.

XIII. Primo igitur si corpus aliquod, data qualibet vi impulsum, juxta directionem AD moveatur, fig. 4., ipsique adjungatur vis alia, quæ dirigatur juxta rectam aliam AP, manifestum est motum corporis accedendi ad rectam DC rectæ AD perpendicularem augeri oportere si angulus PAD sit acutus, minui si sit obtusus. Quare si angulus PAD inclinationis duarum virium ad se invicem ex acuto in obtusum gradatim transeat, cum recta AP conversa circa punctum A perpendicularis fiet rectæ AD, velocitatis nec auctæ, nec imminutæ casus habebitur, & corpus ob vim AD eodem modo accedet lateri DC, sive vis AB imprimatur, sive non. Et plane cum producta DA in E directio vis AB utrimque æqualiter ad AD, & AE inclinetur, & utrimque æqualiter se habeat, si quæ sit ipsius actio secundum AD corpus accelerando, aut retardando, alia æqualis actio in contrariam partem haberi debet secundum AE: quo posito binæ æquales, & contrariæ vires se mu-

tuo

tuo destruent. Itaque corpus ob vim AD, post finem dati temporis, reperietur alicubi in recta DC, & similiter ob vim alteram in recta BC reperietur, sive simul, sive seorsim binæ vires imprimantur. Itaque binis viribus simul impressis corpus in fine ejusdem temporis reperietur in communi binarum rectarum concursu C: & quia motus omnis, qui ex viribus semel impressis oritur, per rectam lineam debet dirigi; corpus ex A in C non nisi per diagonalem AC feretur, & diagonalem rectanguli absolvet eodem tempore, quo absolveret latera viribus separatis. Scilicet binæ vires binis lateribus expressæ æquivalebunt vi uni, quæ exprimatur diagonali, & uni huic binæ illæ, & binis illis hæc una substitui poterit. Pari enim modo dum corpus per diagonalem AC movetur, spatiis AB, AD recedit a lateribus AD, AB, & bini hi motus, cum rectos angulos suis directionibus efficiant, nequeunt se invicem turbare.

XIV. His positis in puncto A, fig. 5. & 6., imprimantur corpori binæ aliæ quæcumque vires AG, AE, compleanturque rectangula ABCD, ADEF. Ut modo diximus vis AE æquivalebit duabus aliis AD, AF: adeoque binæ AE, AG æquivalebunt binis AD, & AG $\pm$ AF. Valebit autem superius signum, cum angulus EAG erit acutus, & punctum F ultra A ad eamdem plagam cadet cum puncto G: inferius vero, cum puncta F, G cadent in adversas partes, & fiet obtusus angulus EAG. Quare cum rectæ AF, GB æquales sint inter se, vis AG $\pm$ AF pro casu utroque anguli acuti, obtusique æquivalebit vi AB: atque ita binæ AE, AG reducentur ad binas AD, AB, quas diximus æquivalere vi uni AC. Vicissim vis AC æquivalebit binis AD, AB, & pro vi AB secundum eamdem directionem substitui poterit vis AB + AF — AF. Jam vero pro casu anguli acuti vires AD, & + AF componunt vim AE, & vis AB — AF est ipsa vis AG: pro casu vero anguli obtusi vis AE componitur ex binis AD, & — AF, ac vis AB + AF, sive AB + BG est adhuc eadem vis AG. Universim igitur binæ vires binis lateribus parallelogrammi cujuslibet expressæ æquivalebunt vi uni, quæ exprimetur diagonali, & vis diagonali expressa æquivalebit duabus aliis, quæ exprimentur lateribus.

XV. Quia diagonalis semper est minor summa duorum laterum, composita etiam velocitas secundum diagonalem minor erit summa duarum velocitatum juxta parallelogrammi latera resolutarum. Sed si ex E, & G, fig. 7., in AC ducantur perpendicula EM, GN,

erit AN pars vis AG, & AM pars vis AE, quæ secundum AC exercebitur, eritque in casu anguli EAC acuti $AC = AN + NC = AN + AM$: & in casu obtusi ejusdem anguli erit $AC = AN - AM$. Semper igitur quem effectum duæ vires edunt secundum diagonalis directionem, eumdem edit in directione eadem vis una æquivalens. Pariter quia vires æquales, ac contrariæ se se invicem compensant, atque est $AC = AN \pm AM$, & $NG = ME$, perinde erit si loco vis AC intelligamus corpus in puncto A secundum AC impelli summa, aut differentia virium $AN \pm AM$, & secundum directionem perpendicularem impelli viribus $+ ME$, & $- NG$. Jam vero binæ $+ AN$, & $- NG$ componunt vim AG, & in casu anguli acuti vires $+ AM$, & $+ ME$ in puncto A componunt vim AE: pro casu vero obtusi anguli vis AE componitur ex binis $- AM$, & $+ ME$. Rursus itaque vis, quæ exprimitur diagonali, eumdem effectum exerit secundum latera, quem edunt binæ aliæ vires binis lateribus expressæ.

XVI. Simili modo vis ex binis prioribus composita cum tertia qualibet vi superaddita, & quotcumque aliis componi poterit: atque universim quotcumque vires, quarum directiones per datum aliquod punctum transeant, semper in unicam vim consurgent. Ut vero simul componamus etiam duas vires Gg, Hh, fig. 8., inter se parallelas, impressasque ad eamdem plagam, statuamus easdem vires in iisdem punctis G, & H imprimi secundum directiones quascumque alias GA, HA, quæ intra parallelas Gg, Hh concurrant in puncto A. Posita $PA = Gg$, & $EA = Hh$, completoque parallelogrammo PAEC, vis æquivalens erit AC. Deinde vero si ex G, & H in AC productam demittantur perpendicula GN, HM, erit

$$\frac{GN}{GA} : \frac{HM}{HA} = \text{sin. GAT} : \text{sin. HAT} = PC : PA = Hh : Gg.$$

Manente igitur quantitate virium Gg, Hh in punctis G, & H impressarum, statuamus directiones GA, HA ita variari, ut longius semper concurrant, ac denique angulus GAH fiat minor quocumque dato. Rectæ GA, TA, HA fient denique æquales, & parallelæ inter se, ac puncta N, T, M simul congruent, & diagonalis AC æquabitur summæ duorum laterum AP, AE. Itaque binæ vires Gg, Hh, quæ ad eamdem plagam juxta directiones parallelas tendant, vi uni æquivalebunt, quæ quantitate sua exæquet summam duarum virium, & directionem pariter parallelam habeat, atque ita applicetur in puncto T, ut distantia GH dividatur in ratione reciproca virium, & sit $GT : HT = Hh : Gg$. XVII.

XVII. Si viribus pondera substituantur perinde erit, habebiturque æquilibrium ubi distantiæ a puncto suspensionis erunt reciproce ut pondera suspensa: quod vetus Archimedis principium actioni, ac legibus machinarum omnium explicandis sufficit: in iis enim potentia motrix ad tanto majorem distantiam a centro motus applicatur quanto major resistentia per datum aliquod intervallum superanda est. Vis autem omnis, quam punctum T in casu æquilibrii sustinebit, æqualis erit summæ duarum virium parallelarum in G, & H ad eamdem plagam tendentium: atque universim, datis duabus viribus Gg, Hb, parallelis, & conspirantibus, dataque ipsarum distantia HG, accipiendo $HT = \frac{Gg.HG}{Gg+Hb}$, habebitur punctum T, cui vis æqualis earumdem summæ, in adversam partem, & parallele applicanda est, ut æquilibrium habeatur. Et vicissim datis duabus viribus Tt, Gg oppositis, & parallelis, dataque ipsarum distantia TG, vis una æquivalens habebitur utriusque differentiam juxta directionem parallelam applicando in puncto H, quod a T distet quantitate $HT = \frac{Gg.TG}{Tt-Gg}$. Hac etiam ratione vis quælibet TP perpendicularis plano cuilibet HOG, fig. 9., semper in binas parallelas resolvi poterit, quarum una applicetur in puncto H, & obtineat valorem quemcumque datum: si scilicet producatur HT in G, & sit HT: GT ut differentia duarum virium in H, & T agentium ad vim agentem in puncto H, & differentia eadem virium applicetur in puncto G.

XVIII. Et quia binæ vires secundum rectam AH perpendicularem, & AB parallelam plano HOG, vim unicam AC componunt plano eidem obliquam, quæ in duas resolvi poterit per C transeuntes, perpendicularem unam, alteram jacentem in plano ipso; binæ autem vires perpendiculares in C, & G vim unicam, & perpendicularem pariter componunt: binæ vires, quarum una sit perpendicularis, altera parallela alicui plano, resolventur demum in binas alias, quarum una sit perpendicularis, altera in plano ipso jaceat. Cum itaque vires omnes, quæ agunt in plano aliquo, sive alicubi simul conveniant, sive parallelæ sint inter se, ad unicam vim in eodem plano agentem reduci possint; cumque insuper vires omnes perpendiculares plano, ut jam ostendimus, reducantur pariter ad vim unicam, quæ exæquet summam virium tendentium ad eam-

eamdem plagam, aut differentiam earum, quæ tendunt in adversas partes; ac demum cum vires omnes parallelæ plano alicui dato, qua modo ostendimus methodo, cum viribus perpendicularibus ita componi possint, ut una tantum sit vis perpendicularis, altera in plano ipso jaceat: universim quæcumque vires, quæ utcumque alicui corpori possunt imprimi, ultimo in binas tantum resolventur, quarum una jaceat in plano quocumque dato, altera sit plano perpendicularis: quod elegans theorema ab Equite Mozzio traditum est in tractatu de rotatione corporum.

XIX. Hisce præmissis compositionis, & resolutionis motus notionibus, quæ Galilæus de corporum descensu in plano dato, & de corporibus oblique projectis attigit, & quæcumque alia obliquos corporum motus respiciunt, brevissime exponi possunt. Nam si in planum inclinatum AG ex B demittatur perpendiculum BH, fig. 10., ac gravitas omnis G, quæ juxta verticales lineas dirigitur, in duas resolvatur; erit $\frac{G.\,HB}{AB}$ vis, qua planum AG a descendente corpore premetur, & $G.\frac{AH}{AB} = G.\frac{AB}{AG}$ erit vis, qua juxta longitudinem plani corpus ad descensum sollicitabitur. Quare corpus descendet motu uniformiter accelerato, & spatia percursa erunt in duplicata ratione temporum, sive velocitatum: & si in formula $V^2 = 2G.S$ scribamus $\frac{G.\,AB}{AE}$ loco G, & AG loco S; fiet $\sqrt{2G.\,AB}$ velocitas totius descensus per AG, eadem scilicet, quæ perpendiculari lapsu per totam plani altitudinem AB acquiri posset. Et cum similiter in punctis aliis æque altis C, D, aut F, E velocitates descensuum debeant esse æquales, tempora descensuum per spatia CF, DE erunt ut spatia ipsa, & totum tempus descensus per AG erit ad tempus liberi lapsus per AB, ut AG: AB. Tempus autem descensus per AB est ad tempus descensus per Ab in ratione subduplicata AB: Ab, ac tempus liberi lapsus per Ab est ad tempus descensus per Ag in ratione simplici Ab: Ag. Tempora igitur descensuum in diversis planis AG, Ag erunt in ratione composita ex simplici directa longitudinum AG, Ag, & subduplicata reciproca altitudinum AB, Ab: & si altitudines, sive elevationes planorum AB, Ab sint in ratione duplicata longitudinum AG, Ag, descensuum tempora utrobique erunt æqualia.

XX.

XX. Cum in eodem plano descensuum tempora sint in ratione subduplicata spatiorum percursorum, tempus descensus per AG erit ad tempus descensus per AH in ratione subduplicata AG : AH, sive in ratione simplici AG : AB, quæ pariter cum sit ratio temporum descensus per AG, & AB, æqualia erunt tempora descensuum per totam altitudinem AB, & portionem plani inclinati AH, quæ perpendiculari BH ex B in planum inclinatum ducta definitur: & cum insuper velocitates in B, & G æquales sint, & velocitas per AG sit ad velocitatem acquisitam per AH ut AG : AB; velocitas in B ad velocitatem in H se habebit ut longitudo plani inclinati ad altitudinem. Posita vero æqualitate temporum descensus per AB, & AH manifeste sequitur tempora etiam descensus per chordas quaslibet AH, HB, Ah, hB, fig. 11., in circulo AHB esse æqualia. Nam primo cum triangula semicirculo insistentia sint rectangula, tempus descensus per inclinatum planum AH, aut Ah æquale erit tempori descensus per diametrum AB. Deinde cum ex H ducta in diametrum AB perpendiculari HC tempus descensus per HB sit ad tempus descensus per CB ut HB : CB, & tempora descensuum per CB, & AB sint in ratione subduplicata ipsarum altitudinum, sive in ratione simplici CB : HB, tempora descensuum per AB, & HB, erunt pariter inter se æqualia.

XXI. Paucis itaque habemus theoremata fere omnia Galilæi de corporum descensu in plano dato. Ipse vero de corporum descensu per plura plana sibi invicem succedentia, in Theor. XXII. de motu naturaliter accelerato, acturus, censuit velocitatem ex uno in aliud planum transeundo ob variam inclinationem non imminui, collegitque inde lationem omnium velocissimam a termino ad terminum per lineam non rectam, sed circularem fieri. At si corpus ex plano AC in CG transeat, fig. 12., & ex A in CB productam demittatur perpendiculum AB, & sint BH, HF perpendicula alia ex B in AC, & ex H in horizontalem FG ducta, resolutione facta, erit velocitas in plano AC ad velocitatem in plano CG residuam in ratione simplici AC : BC, sive in ratione subduplicata AC:HC. Scilicet velocitas, qua corpus in plano CG moveri perget, ea erit, quæ acquiri posset cadendo ex H in C, quæque cum æqualiter semper augeri debeat in punctis æque altis plani CG, & perpendiculi CD, corpus per duo inclinata plana AC, CG ad G usque ea velocitate decidet, quæ perpendiculari lapsu per altitudinem HF acquiri posset. Quod si centro C, & radio CB descri-

scribatur circularis arcus BM erit AM portio velocitatis, quæ occursu alterius plani amittetur, eaque dato angulo plani utriusque ACB semper data erit, imminuto autem ultra quemcumque limitem angulo, & arcu BM, minuetur in duplicata ipsius ratione. Quare si longitudo, & angulus planorum quotcumque sibi proxime succedentium minuatur semper, & plana in curvam aliquam continuam desinant, velocitatis imminutio ob curvitatem ipsam nulla erit, & corpus per curvam quamlibet continuam eadem velocitate decidet, quam perpendiculari lapsu ex pari altitudine sibi compararet.

XXII. Descensum omnium citissimum a puncto ad punctum datum per arcum non circularem, sed cycloidalem fieri Johannes Bernoullius primum, ac deinde Jacobus frater, Newtonus, Leibnitius, Hugenius, Hospitalius, Grandius, aliique aliis rationibus demonstrarunt. Id ipsum sinthetice, & more veterum colligetur præmisso lemmate: quod si velocitates corporis ex puncto N, fig. 13., ad rectam tQq, & inde ad punctum T transeuntis datæ sint, ductaque Nn parallela ipsi tQ, & perpendicularibus Qn, Tt, sit sinus anguli NQn ad sinum anguli QTt ut velocitas per NQ ad velocitatem, qua percurritur QT; corpus per binas rectas NQ, QT citius feretur, quam per alias quaslibet Nq, qT iisdem terminis N, T comprehensas. Quod ut pateat ducatur ex q in NQ perpendiculum qo, & ipsi QT in Q erigatur perpendiculum QO, cui rursus ex q occurrat perpendiculum aliud qO. Cum sint æquales anguli Qqo, NQn, qui cum eodem qQo efficiunt unum rectum, similia erunt triangula rectangula qQo, QNn, eritque $Qo = \frac{Nn \cdot Qq}{QN}$. Pariter cum angulus TQO sit rectus, æquales erunt anguli TQt, OqQ, qui cum eodem qQO efficiunt rectum alterum, & similia erunt triangula QqO, TQt, eritque $qO = \frac{tQ \cdot Qq}{TQ}$. Erit itaque $qO : Qo = \frac{tQ}{TQ} : \frac{Nn}{QN}$, sive erunt spatia qO, Qo proportionalia velocitatibus, quibus percurrentur rectæ QT, NQ, & quibus rectæ etiam qT, Nq juxta hypothesim absolvi possent. Scilicet spatium Qo velocitate $\frac{Nn}{QN}$ eodem tempore absolvetur, quo spatium qO velocitate $\frac{tQ}{TQ}$ pos-

set

fet abfolvi. Sed eft qX majus quam qO, & Nq majus quam No, ac TX majus quam TQ. Itaque duæ fimul rectæ Nq, qT iifdem terminis N, T comprehenfæ abfolventur femper majori tempore quam duæ priores NQ, QT.

XXIII. Hoc pofito ftatuamus corpus defcendere in curva aliqua circa axem PR defcripta, & defcenfum incipere ex horizontali linea traducta per punctum P, ut juxta §. XXI. velocitates omnes defcenfus in punctis N, & Q fint in ratione fubduplicata altitudinum PC, Pc. In primis intelligitur facile quod ut corporis defcenfus per totam curvam propofitam fit citiffimus quam per aliam curvam quamcumque comprehenfam iifdem terminis, quælibet etiam curvæ elementa NQ, QT minori tempore abfolvi debent quam elementa alia Nq, qT comprehenfa terminis N, & T: fecus cum eadem fit velocitas in puncto T per quamcumque demum curvam ex data altitudine fiat tranfitus ad punctum T, fi citior effet defcenfus per NqT, quam per NQT, per curvam etiam $NqTR$ citius corpus defcenderet a puncto G ufque ad punctum aliud propofitum H. Ut autem elementa NQ, QT abfolvantur omnium citiffime effe debet $\frac{Nn}{QN}$ ad $\frac{tQ}{TQ}$ ut velocitas per NQ ad velocitatem per QT. Curva igitur citiffimi defcenfus fic comparata effe debet ut fit ubique $\sqrt{PC} : \sqrt{Pc} = \frac{Nn}{QN} : \frac{tQ}{TQ}$: & cum in vertice curvæ R, pofito fcilicet $tQ = TQ$, & $Pc = PR$ fiat $\sqrt{PC} : \sqrt{PR} = Nn : QN$, ea etiam ipfius curvæ proprietas effe debet ut finus deviationis elementi cujuslibet QN a verticali linea Qn fe habeat ad finum totum in fubduplicata ratione altitudinis defcenfus PC ad totam curvæ altitudinem PR. Hæc autem eft proprietas cyloidis, quæ ex fuperiori puncto G incipiat, ac tranfeat per aliud punctum H.

XXIV. Sit in fig. 14. PG bafis, & PR altitudo curvæ propofitæ, ac binæ femiordinatæ CN, cQ femicirculo PMR occurrant in M, m, junganturque PM, RM. Erit CM : MR = PM : PR = $\sqrt{PC} : \sqrt{PR}$, quæ eadem cum in breviffimi defcenfus curva debeat effe ratio $Nn : QN$, fimilia erunt triangula QNn, RMC, & elementum curvæ QN, ac tangens in puncto N parallela erit fub-

ſubtenſæ MR, eritque $Nn : Qn = Nn : Cc = CM : CR$. At ſi centrum ſemicirculi ſit B, erit elementum peripheriæ $Mm = \frac{BR}{CM} . Cc$, atque ita fiet elementum ſemiordinatæ $Nn = \frac{CM . Cc}{CR}$

$$= \frac{CM^2 . Mm}{CR . BR} = \frac{2CM^2 . Mm}{MR^2} = \frac{PC . Mm}{BR} = Mm - \frac{CB . Mm}{BR}.$$

Eſt vero Mm elementum circularis arcus PM, & $\frac{CB . Mm}{BR}$ elementum ſemiordinatæ circuli CM. Itaque ſumma omnium Nn pergendo ex G ad N, ſive differentia duarum PG, CN æqualis erit differentiæ circularis arcus PM, & ſemiordinatæ CM: & quia in vertice curvæ R evaneſcit CM, erit baſis curvæ PG æqualis ſemiperipheriæ circulari PMR: ac denique erit eadem baſis æqualis ſummæ arcus PM, & rectæ MN, ſive erit recta quævis MN circulari arcui MmR æqualis, quæ eſt vulgaris proprietas cycloidis, cujus ſemicirculus genitor ſit PMR. Facile vero invenietur diameter PR ſemicirculi PMR, quo ſemicycloìs GHR gigni poteſt, ſi in fig. 15. puncta G, H jungantur recta GH, &, ſemicirculo quovis genitore pr deſcribatur ſemicycloìs Gr, quæ ex G incipiat, & rectam GH ſecet in F, accipiaturque $GF : GH = pr : PR$. Nam ſi initio motus ducto a puncto G æqualibus angulis ad baſim PG inclinentur ſemicirculi pFr, PMR, ſimiles erunt curvæ GF, GH, & ad ipſas æqualibus angulis inclinabuntur rectæ GF, GH, eruntque homologa cycloidum latera proportionalia.

XXV. Huic eleganti proprietati cycloidis in præclaro opere Horologii Oſcillatorii aliam Hugenius addidit, quod & per totam cycloidem GR, fig. 14., & per quemcumque ipſius arcum FR ſit corporum deſcenſus æquidiuturnus. Quod ut breviſſime demonſtretur theorema, incipiat deſcenſus ex puncto F, & gravitas acceleratrix exprimatur unitate, & juxta §. IV. & XXI. ſit $\sqrt{2AC}$ velocitas deſcenſus in puncto N. Erit $\frac{NQ}{\sqrt{2AC}}$ tempus deſcenſus per elementum cycloidis NQ. Quia vero in cycloide eſt $CR : RM = Qn : QN$, ut modo diximus, ſi diametro AR, & centro V deſcribatur ſemicirculus AOR, fiet idem tempus deſcenſus

$$\frac{RM . Qn}{CR . \sqrt{2AC}} = \frac{Cc . \sqrt{PR . CR}}{CR . \sqrt{2AC}} = \frac{Cc . \sqrt{PR}}{CO \sqrt{2}}.$$ Cumque deſcenſus

ſit

fit $Cc = \frac{CO.Oo}{AV}$, fiet tempus ipsum $\frac{Oo.\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$: adeoque, ob constantes PR, AV, erit totum tempus descensus per cycloidalem arcum FQ ad tempus descensus per arcum QR ut circularis arcus AO ad arcum OR: ac tempus descensus per integrum cycloidis arcum FQR erit $= \frac{AOR.\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$. Quare cum semicirculus AOR sit $= \frac{AR.PMR}{PR}$, & tempus descensus per diametrum PR sit $= \sqrt{2PR}$, tempus descensus per quemcumque cycloidis arcum FR erit ad tempus descensus per datam cycloidis altitudinem PR ut $\frac{PMR}{\frac{1}{2}\sqrt{2PR}} : \sqrt{2PR} = PMR : PR$, scilicet in constanti ratione semiperipheriæ circuli ad diametrum.

XXVI. Ex ipsa etiam temporis formula consequitur quod si corpus descendere incipiat ex puncto G, erit tempus descensus per cycloidalem arcum GN ad totum tempus descensus per integram semicycloidem GR ut circularis arcus PM ad semiperipheriam PMR: & cum totum tempus descensus sit $\frac{PMR}{\frac{1}{2}\sqrt{2PR}}$; tempus descensus per cycloidalem arcum GN a motus initio supputatum æquabitur arcui PM diviso per $\sqrt{\frac{1}{2}PR}$. Quare cum juxta §. IV. tempus descensus per altitudinem quamlibet Gg, fig. 15., sit $\sqrt{2Gg}$, si accipiatur arcus PM medius proportionalis inter diametrum PR circuli genitoris, & altitudinem quamlibet propositam Gg; corpus æquali tempore per cycloidalem lineam GN, & verticalem Gg descendet: eodemque modo aliis circulis genitoribus determinando alios cycloidales arcus Gn Johannes Bernoullius signare docuit curvam Nng, ad quam corpus æquali tempore per cycloidales quoscumque arcus Gn, & altitudinem Gg perveniet. His alias addere possumus descensuum analogias. Cum tempus descensus per PC sit pariter $\sqrt{2PC}$, atque ad tempus descensus per subtensam PM se habeat ut PC : PM; inprimis tempus descensus per PC erit ad tempus descensus per æque altum cycloidis arcum GN ut subtensa cir-

cularis arcus PM ad arcum ipfum : deinde vero tempus defcenfus per fubtenfam erit ad tempus defcenfus per GN ut diameter PR ad eumdem arcum.

XXVII. Principium æquidiuturni defcenfus corporum in cycloide horologiis automatis ingeniofe aptavit Hugenius, invenitque quod fi femicycloidi GXK, fig. 14., bafi GL, & femicirculo genitore GUL defcriptæ filum circumplicetur, atque ex altero fili extremo G grave aliquod corpus pendeat, corpus filo evoluto decidens femicycloidem aliam GNR priori æqualem defcribet. Nam fi binæ femieycloides GXK, GNR, & bini femicirculi GUL, PMR æquales fint inter fe, accipianturque arcus, & chordæ GU, PM pariter inter fe æquales, erunt ipfæ inter fe parallelæ. Tum fi per punctum U traducatur femiordinata ZUX, quæ priori femicycloidi occurrat in puncto X, juxta ea, quæ in §. XXIV. adnotata funt, tangens $X u N$ parallela erit chordæ GU, eritque $X u = UG = PM$, & $u G = XU$. At in cycloide bafis PG æquatur femiperipheriæ circuli genitoris PMR, & XU, five uG æquatur circulari arcui GU, five PM, ac pariter MN æquatur arcui $M m R$. Erit itaque $MN = Pu$, & $PM = uN$, ac tangens $XN = 2GU$. Infuper fi ex puncto m in chordam RM ducatur perpendiculum mv, ob æqualitatem angulorum RMm, RPM eidem arcui infiftentium, fimilia erunt triangula rectangula Mvm, PMR, MCR, eritque

$Mv = \frac{CM}{MR} . Mm$. Unde cum fit ut antea $Nn = \frac{2CM^2}{MR^2} . Mm$, & $NQ = \frac{MR}{CM} . Nn = \frac{2CM}{MR} . Mm$; elementum curvæ NQ duplum erit elementi chordæ Mv, & tota curva NR dupla erit totius chordæ RM. Simili modo patebit arcum GX duplum effe chordæ GU, five effe tangenti NX æqualem. Itaque corpus ex G fufpenfum, filo ufque ad X evoluto, reperietur in puncto N, & continuato poftmodum defcenfu femicycloidem GNR priori GXK æqualem defcribet.

XXVIII. Si pendulum longitudinis KR, feu 2PR conftituatur inter duas femicycloides altitudinis KP, defcendendo, atque afcendendo defcribet cycloidem aliam altitudinis PR, & five ex G, five ex F incipiat defcenfus, ofcillationes omnes majores, minorefque abfolventur æquali tempore: eritque tempus integræ ofcillationis ad tempus liberi defcenfus per dimidiam longitudinem penduli ut peripheria circuli ad diametrum. Et quia fi punctum F propius accedat in-

infimo puncto R cycloidalis arcus FR abit in minimum circularem arcum centro K, & diametro KR descriptum; oscillationes etiam in minimis circuli ejusdem arcubus, utcumque inter se inæqualibus, absolventur æquali tempore. Id instituto experimento primum deprehendit Galilæus, non recte autem Keillius, Parentius, aliique authores ex eo collegerunt quod chorda ultimo fiat æqualis arcui, quodque idem semper sit tempus descensus per chordas omnes ejusdem circuli. Observandum est enim non eamdem & chordæ, & arcus utcumque exigui positionem esse, & propterea descensuum tempora utrobique inter se differre. Nam cum tempus descensus per exiguum quemcumque circularem arcum, seu tempus unius semioscillationis penduli longitudinis KR, ad tempus descensus per altitudinem PR se habeat ut semiperipheria ad diametrum, ad tempus descensus per altitudinem eamdem quadruplam se habere debet ut quadrans circuli ad diametrum: est autem 4PR diameter circuli, cujus exiguus arcus absolvitur oscillando, & tempus descensus per totam circuli diametrum æqualis est tempori descensus per chordam quamlibet ejusdem circuli.

XXIX. Data longitudine penduli uno minuto secundo temporis sive in cycloide, sive in minimo circulari arcu oscillantis, erit tempus descensus per dimidiam eamdem longitudinem ad tempus unius secundi ut diameter ad peripheriam: & quia spatia libero lapsu absoluta sunt in ratione duplicata temporum; erit dimidia eadem longitudo penduli ad spatium, quod corpus uno secundo temporis libere decidendo absolveret in duplicata ratione diametri ad peripheriam. Unde si longitudo penduli simplicis uno secundo temporis Parisiis oscillantis cum Hugenio statuatur pedum parisiensium 3, & pollicum $8\frac{1}{2}$, erit spatium libero lapsu confectum eodem tempore pedum 15, & linearum $1\frac{1}{6}$. Mutata vero longitudine penduli & tempus liberi descensus, & tempus integræ oscillationis sive in cycloide, sive in minimo arcu circulari variabitur in ratione longitudinis subduplicata: & viciſſim longitudines pendulorum erunt in ratione duplicata temporum integrarum oscillationum: & quia numerus oscillationum dato tempore confectarum est reciproce ut tempus unius oscillationis; erunt longitudines pendulorum reciproce in duplicata ratione numeri oscillationum eodem tempore absolutarum. Quod si vim etiam gravitatis variari intelligamus, cum tempora descensuum generatim sint ut velocitates directe, & gravitas acceleratrix reciproce: velocitates vero sint in ratione subduplicata gravitatis acceleratricis, spatiorumque libero lapsu percursorum: adeoque

 de-

descensuum tempora sint in ratione directa subduplicata spatiorum, & subduplicata reciproca gravitatis; generatim etiam oscillationum earumdem tempora erunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum directe, & subduplicata gravitatis reciproce: & si tempora oscillationum in duobus pendulis sint æqualia, erunt longitudines pendulorum gravitatibus acceleratricibus proportionales.

XXX. Hisce inventis theoriam corporum descendentium in datis planis a Galilæo incœptam eleganter perfecit Hugenius, atque ad figuræ terrestris determinationem, amplissimosque alios physicæ usus præparavit. Galilæus vero corporum etiam libere projectorum leges cœpit exponere, invenitque eorumdem semitas in spatio non resistente parabolicas esse oportere: quod ex primis motus notionibus facile colligitur. Cum enim corpus juxta datam rectam projectum, atque inde ob vim gravitatis continue deflexum in curva aliqua linea ART moveri debeat, fig. 16., & 17., sibi ipsi relictum in puncto quocumque A, cessante vi gravitatis, deberet excurrere per lineam rectam AC, quæ curvæ in eodem puncto productio est, sive quæ curvam ibidem tangit: & cum spatia AB, AC uniformiter juxta directionem datam excursa debeant esse temporibus proportionalia, & spatia BR, CT, quibus inde ob vim gravitatis retrahi posset corpus, sint in ratione temporum duplicata; parallelis ductis, erit $Ar : At = Rr^2 : Tt^2$, & curva ART erit parabola diametro AN descripta. Cumque insuper corpus ob solam vim gravitatis a tangente deviando in puncto quocumque C per spatium CT velocitatem illam acquirat, qua uniformiter continuata eodem tempore duplum spatium posset absolvere, erit velocitas descensus ad velocitatem projectionis ex puncto A ut 2CT: AC, & si parameter diametri AN vocetur L, & post descensum CT binæ illæ velocitates æquentur inter se, erit $L . At = Tt^2 = 4At^2$, sive $At = \frac{1}{4} L$, nimirum projectionis velocitas in puncto quocumque A ea erit, quæ gravitate uniformiter agente acquiri posset libere decidendo per quartam partem parametri ad diametrum illam spectantis, quæ transit per punctum A.

XXXI. Hoc posito si parabolæ vertex sit T, axis TQ, focus H, & P latus rectum principale, ex conicorum elementis erit $TH = \frac{1}{4} P$, $TL = TC$, & $HC = HA = \frac{1}{4} P + TL = \frac{1}{4} L$. Velocitas igitur in puncto A ea erit, quæ acquiri posset cadendo per altitudinem æqualem distantiæ puncti ipsius a parabolæ foco H: & si centro A, ac radio AH circulus describatur, in ipsius peripheria erunt foci parabolarum omnium, quæ describi possunt a corpore ex pun-

puncto A data cum velocitate secundum directionem quamlibet A c projecto. Quod si altitudo AH, & positio tangentis data sit, sive angulus cAP, quem directio vis projectilis cum horizontali AP efficit, facile admodum construetur projecti semita capiendo angulum cAh æqualem angulo cAn, qui cum cAP rectum complet, & centro A, radioque AN, per quem libere decidendo projectionis velocitas acquiri posset, describendo circularem arcum, qui secet rectam Ah in H. Erit enim H focus parabolæ, atque inde in AP demisso perpendiculo HL erit semiamplitudo jactus AL, acceptaque HC = HA, & bisecta CL in T, erit T vertex parabolæ, atque, ob HA = HT + LT, erit parabolæ altitudo LT = $\frac{1}{2}$ HA — $\frac{1}{2}$ HL: nimirum & altitudo LT, & amplitudo AP evadet maxima cum punctum H in L cadet, eritque semirectus projectionis angulus cAP. Vicissim si data sit altitudo AN, & amplitudo AP, ipsique in L bisectæ erigatur perpendiculum LQ, & centro A, radioque AN describatur circularis arcus, qui secet perpendiculum in H, erit H focus parabolæ, ac producto perpendiculo usque in C ut sit HC = HA, erit AC positio tangentis, & vertex parabolæ erit T medium inter L, & C. Data pariter tangentis positione Ac, sive angulo projectionis cAP, & data amplitudine jactus AP, ipsaque bisecta in L, & bisecto in T perpendiculo LC habebitur vertex parabolæ, accipiendoque æquales angulos LCA, CAH, ut sint æquales rectæ HC, HA, erit HA altitudo illa per quam libere decidendo, ob solam vim gravitatis, velocitas projectionis acquiri posset.

XXXII. Simplici hac constructione exhibentur præcipua Galilæi theoremata de jactu corporum in plano horizontali. Problema de jactu corporum in plano quolibet primum attigerat Torricellius, ac deinde Andersonius, Hallejus, Roemerus, Hireus, Grandius, aliique aliis rationibus solverunt. Simpsonius in Exercitationibus Mathematicis ita problemati satisfecit ut dato semel experimento amplitudinis maximæ horizontalis, quæ dato impetu projectionis, dato videlicet tormento, dataque pulveris pyrii quantitate, semirecto directionis angulo attingitur, cætera omnia, quæ ad planum acclive, aut declive pertinent, assecutus fuerit, ac practicas regulas tradiderit in re Ballistica apprime utiles. Regulæ omnes sic possunt contrahi. Sit in fig. 18. QP amplitudo maxima, quæ in plano horizontali, & semirecto projectionis angulo attingi posset eadem velocitate, qua in plano inclinato QR juxta rectam QV projectione facta attingitur scopus R. Erit $\frac{1}{2}$ QP altitudo illa, ex qua

qua libere decidendo eadem projectionis velocitas acquiri posset, & parameter spectans ad diametrum transeuntem per punctum Q erit 2QP. Est autem ob naturam parabolæ $2QP.RV = QV^2$, atque ob similitudinem triangulorum VQF, VRT est $QV : QF = RV : RT$. Quare pro RV scribendo $\frac{QV.RT}{QF}$, fiet $2QP.RT = QV.QF$, accipiendoque quartam proportionalem ad RT, QV, & QF habebitur quadruplum illius altitudinis, ex qua corpus libere decidens acquireret velocitatem quæsitæ projectionis.

XXXIII. Æquatio illa $2QP.RT = QV.QF$ hoc ordine disponi poterit $QF.\frac{QF}{QR} = 2QP.\frac{RT}{QR}.\frac{QF}{QV}$, sive $QF.\text{cos}.RQF = 2QP.\text{sin}.VQR.\text{cos}.VQF$, atque ita erit $QF:2QP$ in ratione composita cosinus inclinationis VQF tormenti cum horizonte ad cosinum elevationis RQF scopi R supra horizontem ipsum, & sinus elevationis VQR tormenti supra scopum R ad sinum totum. Datis igitur iisdem angulis supputari facile poterit altitudo debita projectionis velocitati: ut si elevatio scopi sit $8° 15'$, tormenti inclinatio $32° 30'$, distantia QF pedum 5600, ad scopum feriendum opus erit tormento, cujus amplitudo maxima in plano horizontali sit pedum 8000. Quod si non horizontalis distantia QF, sed QR tantum in plano inclinato data sit, pro QF scribendo $QR.\text{cos}.RQF$, superior æquatio hanc aliam formam induet $QR.\overline{\text{cos}.RQF}^2 = 2QP.\text{sin}.VQR.\text{cos}.VQF$, hoc est quadratum cosinus inclinationis plani QR cum horizonte erit ad rectangulum sinus inclinationis tormenti ad planum, & cosinus inclinationis tormenti ad horizontem ut dupla amplitudo maxima ad amplitudinem QR. Data igitur amplitudine maxima, quæ semirecto directionis angulo habetur, datisque angulis inclinationum tormenti, & plani ad horizontem, præsto erit ad quam usque amplitudinem jactus in eodem plano extendi possit: ut si sit amplitudo maxima pedum 8000, angulus inclinationis tormenti ad horizontem $32° 30'$, inclinationis plani $8° 15'$, inclinationis tormenti, & plani $24° 15'$, erit distantia scopi pedum 5658.

XXXIV. Quod si vicissim ex data velocitate quæratur angulus projectionis, quæ ad feriendum scopum requiritur in plano dato, in primis cum ob naturam parabolæ, quæ per puncta Q, & R tran-

transfeat, atque a recta QV tangatur in puncto Q esse debeat $RV = FV - FR = \frac{QV^2}{2QP}$, cumque descripto circulari arcu XROL, & ex O in QP ducto perpendiculo OK, ob triangulorum similitudinem fit $FV = \frac{KO.QF}{QK}$, & $QV = \frac{QR.QF}{QK}$, factis substitutionibus prodibit $\frac{QF^2}{QP} = \frac{2QK.KO.QF - 2FR.QK^2}{QR^2} =$

$\frac{2QK.KO.QF - FR.\overline{2QK^2 - QR^2}}{QR^2} - FR$. Jam vero si arcus OX, OL sumantur inter se æquales, LM sinus dupli arcus OX erit $= \frac{2QK.KO}{QR}$, & cosinus QM dupli ejusdem arcus erit $=$ $\frac{2QK^2 - QR^2}{QR}$, ut ex elementis trigonometricis colligitur.

Fiet itaque $\frac{QF^2}{QP} = \frac{LM.QF - QM.FR}{QR} - FR = LN - FR$:

est enim similiter $\frac{LM.QF - QM.FR}{QR}$ æqualis sinui differentiæ arcuum $LX - RX$. Itaque si scopus propositus sit R, & radio QR describatur circularis arcus XRL, accipiaturque LN æqualis summæ ipsius FR, & tertiæ proportionalis ad amplitudinem maximam QP, & horizontalem scopi distantiam QF, & angulus XQL bisecetur, habebitur directio, quæ ad feriendum scopum requiritur.

XXXV. Ut vero calculus directionis tormenti facilius instituatur, posterior æquatio, pro casu scopi supra horizontem elevati, ad hanc formam reduci poterit

$QF.\ \text{cos}.\ rQF = QP.\ \text{sin}.\ \overline{2VQF - RQF} - QP.\ \text{sin}.\ RQF$:
& si scopus r infra horizontem in plano declivi jaceat, angulum rQF negative accipiendo statui etiam poterit

$QF.\ \text{cos}.\ rQF = QP.\ \text{sin}.\ \overline{2VQF + rQF} + QP.\ \text{sin}.\ rQF$.

Qui-

Quibus positis formulis, si instituto semel experimento innotescat amplitudo maxima, quæ data pulveris pyrii quantitate, tormento dato, & semirecto directionis angulo attingitur, atque intra eamdem amplitudinem proponatur quodcumque objectum supra, aut infra horizontem constitutum, facile construi poterunt tabulæ angulorum, quibus ad objectum feriendum inclinari debet tormentum ad horizontem. Ut si amplitudo maxima QP sit pedum 8000, distantia QF pedum 5600, & angulus RQF elevationis scopi supra horizontem 8° 15', cujus sinus est $0.14349\frac{1}{2}$, cosinus 0.98965, ac fiat $8000 : 5600 = 0.98965 : 0.69275\frac{1}{2}$, quartoque huic numero addatur $0.14349\frac{1}{2}$, habebitur sinus anguli 56° 45', seu 123° 15': atque huic rursus addendo angulum ipsum 8° 15' habebitur angulus 65° aut 131° 30', cujus dimidius 32° 30', seu 65° 45' erit quæsitus projectionis angulus VQF. In casu autem altero scopi r depressi infra horizontem angulo 8° 15', a sinu $0.69275\frac{1}{2}$ demere oportebit $0.14349\frac{1}{2}$, atque ita prodibit angulus 33° 19', seu 146° 41', a quo detrahendo 8° 15', & residuum bifariam dividendo, fiet projectionis angulus 12° 32', aut 69° 13'.

XXXVI. Si in formulis præcedentibus loco QF scribamus QR. cos. RQF, & data amplitudine maxima QP in plano horizontali inquiramus ad quam usque amplitudinem QR in dato plano jactus extendi possit, ob datum angulum RQF patebit amplitudinem ipsam QR maximam evadere cum in casu plani acclivis sin. 2VQF — RQF, & in casu plani declivis sin. 2VQF + rQF valorem maximum obtinebit, fiet scilicet æqualis radio. Itaque angulus LQR in primo casu, & in casu altero LQr æquabitur angulo recto ZQX, adeoque angulus RQX æquabitur angulo LQZ, & ob æquales arcus OX, OL, projectionis directio QV bifariam secabit angulum ZQR, sive ZQr distantiæ plani propositi a vertice. Hoc etiam posito pro eodem casu maximi jactus in plano acclivi, aut declivi erit $QR . \overline{cos. RQF}^2 = QP . \overline{1 \mp sin. RQF}$, & differentia duarum amplitudinum maximarum in duobus planis æqualiter ex adversa parte inclinatis ad horizontem erit $2QP . \frac{sin. RQF}{\overline{cos. RQF}^2}$. At insuper, cum VQF, & VQR simul conficiant unum rectum, erit sin. VQR = cos. VQF, & juxta formulam §. XXXIII. fiet $QR . \overline{cos. RQF}^2 = 2QP . \overline{cos. VQF}^2 = 2QP . \overline{sin. VQR}^2 = 2QP . \overline{sin. \tfrac{1}{2} ZQR}^2$. Ita igitur

gitur si amplitudo maxima in plano horizontali ut antea sit pedum 8000, & sit angulus acclivitatis plani $12^\circ\ 30^{\prime}$, atque ad angulum rectum supersint $77^\circ\ 30^{\prime}$; erit $38^\circ\ 45^{\prime}$ angulus, quo amplitudo maxima jactus habebitur: & si fiat ut quadratum cosinus anguli $12^\circ\ 30^{\prime}$ ad quadratum sinus $38^\circ\ 45^{\prime}$ ita 16000 ad 6577, tot erit pedum amplitudo maxima, quæ in plano propositæ acclivitatis eodem impetu projectionis haberi poterit.

XXXVII. Investigationes omnes hujusmodi, quas modo in tam brevem formam novis demonstrationibus contraximus, præcipuæ sunt quæ mechanicam cælestium motuum tractationem, & theoriam Planetarii systematis antecesserint. Hugenius, & Keplerus inventis aliis cælestem physicam propius præpararunt: ille quidem cum vim centrifugam corporum in circularibus orbitis revolutorum certis legibus explicare, & cum absoluta vi gravitatis conferre cœpit: hic vero cum & ellipticas esse orbitas Planetarum, & areas circa focum descriptas proportionales esse temporibus, & quadrata temporum periodicorum esse in ratione triplicata mediocrium distantiarum ab eodem foco, observationibus feliciter comparatis inter se invicem, deprehendit. Hisce omnibus successit theoria mutuæ, & universalis corporum gravitatis. Theoriam in ortu ipso Newtonus explicationi phænomenorum omnium aptavit, motus periodici Planetarum, Cometarumque, figuræ Terræ, Lunæ, & Jovis, variationis terrestrium ponderum, reciproci maris æstus, præcessionis æquinoctiorum, inclinationis lunaris orbitæ, præcipuarumque æquationum, quæ varium adeo, atque implexum Lunæ motum ad tempus quodcumque datum accurate exhibent.

XXXVIII. Et quidem Newtonus quamdam sinthetici calculi, & approximationum Geometricarum speciem excoluit, assumptaque hypothesi orbitæ proxime circularis ex datis viribus perturbatricibus præcipuas eruit lunarium motuum inæqualitates, cæteras observationibus supplere docuit. Eulerus in dissertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, quæ anno 1748 a Parisiensi Academia præmium retulit, analyticam methodum proposuit, qua generaliter solvi posset problema trium corporum se se attrahentium, & utcumque impulsorum. Novam Lunæ theoriam anno 1750 Petropolitanæ Academiæ obtulerunt Eulerus ipse, & Clairaut, qui etiam Academiæ præmium meruit. Sed antea jam in actis Parisiensis Academiæ de apogæi motu, & de omni Lunæ theoria agere cœperant Clairaut, & Alembert, qui suam postmodum theoriam anno 1754 in lucem edidit. Anno 1767 amplissimi honore præmii Londini prodiit

D theo-

theoria Lunæ a Majero ex Euleri formulis eruta, & tabulæ lunarium motuum accuratissime ex observationibus omnibus Astronomicis elicitæ. Lunarem etiam theoriam illustravit in suis opusculis Cl. Alembertius. Theoriam Satellitum Jovialium ex gravitatis legibus derivatam egregie tradiderunt D. D. Bailly, & la Grange, qui Lunæ insuper, Jovisque, & Saturni theoriam ingeniose amplificavit.

XXXIX. In libro de universali corporum gravitate, quem post reditum ex Gallia, & Anglia in lucem edidi, cum hæc omnia simul complectens problematis motus projectilis, rotationis, & æquilibrii corporum plerumque nova, & directa methodo satisfecissem, pro supputandis inæqualitatibus motus, quæ ex mutua cælestium corporum actione oriuntur, Geometricam Newtoni methodum latius excolui, atque inveni potissimum quod quæ proxime circulares sunt orbitæ, actione virium perturbatricium abire debent in alias orbitas, quæ revolutione, & transpositione ellipseos concentricæ satis accurate construuntur. Æquationem etiam, quæ pendet ex ellipticitate orbitæ revolutæ, in eodem libro exhibui satis accurate. Sed cum deinde consimilem methodum invenissem determinandæ alterius æquationis, quæ pendet ex orbitæ transpositione, theoriam Satellitum Jovialium, qui in orbitis proxime circularibus moventur, binis theorematis, problematisque perstrinxisse mihi visus fui. Occasione vero æquationis ejusdem investigandæ in aliam incidi analyticam methodum, quæ diuturno labore, & studio versata in omnes partes apogæi lunaris motum, & æquationes omnes Lunæ, aliorumque Satellitum, ac Planetarum simul exhibuit, tanto cum tabulis Astronomicis, Majerianis potissimum, consensu, ut quæ exigua quandoque superest differentia non tam multiplicitati reductionum analyticarum, quam alicui observationum incertitudini debeat tribui.

XL. His omnibus cum plura alia adjunxissem ad genesim & generales leges motus projectilis, & rotatorii, ad descriptionem orbitæ parabolicæ, ad resistentiam ætherei medii &c. pertinentia, tractatum integrum Cosmographiæ Physicæ, ac Mathematicæ conscripsi. Et cum deinde priores libri, de rotationis motu potissimum agentes, ultra montes, procurandæ editionis gratia transmissi, incaute fuerint deperditi, quæ ad leges, variationesque periodici motus pertinent illico in lucem edere constitui, & si postmodum hyemali otio, quæ amissa sunt, reficere contigerit, partem alteram operis adjiciam de motu Terræ, Planetarumque circa axem proprium, & phænomenis omnibus inde ortis. Prior autem Cosmographiæ pars quinque libris hic absolvetur.

COS-

COSMOGRAPHIÆ
PHYSICÆ, AC MATHEMATICÆ
LIBER PRIMUS.

DE LEGIBUS MOTUS PERIODICI CÆLESTIUM CORPORUM.

VEtustiores Astronomi, cum periodicum tempus Lunæ, Planetarumque satis accurate definiissent, aliquam etiam esse excentricitatem orbium cælestium, & inæqualitatem motus agnoverunt, inprimis autem Planetas juxta, & contra ordinem signorum Zodiacalium ferri aliquando deprehenderunt, modo directos, modo retrogrados esse, & modo, ut vocant, stationarios. Scilicet Mercurius, & Venus directi apparent cum plena facie fulgent, ac sunt ultra Solem, retrogradi vero cum citra Solem e Terra conspiciuntur: Mars, Jupiter, & Saturnus, quando ad eamdem plagam cum Sole referuntur, directi sunt, atque ex adversa orbitæ parte retrogradi: in singulis autem Planetis directionem inter & retrogradationem habetur statio. Tempora etiam retrogradationum Mercurii, Veneris, Martis, Jovis, & Saturni Ptolemæus statuit ordine dierum $22\frac{1}{2}$, 43, 80, $122\frac{1}{2}$, $140\frac{2}{3}$: stationum $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 2, 4, 8. Ut vero œconomiam motum omnium hujusmodi explicaret informem ipse, atque incongruam excentricorum orbium, & epicyclorum combinationem excogitavit.

Arabes cum diligentiam observationum astronomicarum longius perduxerint, rationem tamen cælestium motuum, & universi totius compagem neque ipsi melius agnoverunt, neque alii posteriores Astronomi ad Copernicum usque, & Galilæum. Et licet quispiam ex veteribus Philosophis afferri possit, qui non Solem circa Terram, sed Terram circa Solem moveri indicaverit, quo tamen ordine Planetæ omnes volvantur circa Solem, quomodo pro vario Terræ loco in sua orbita Planetæ in adversas partes videantur ferri, unde oriantur dierum, ac noctium vicissitudines explicare, atque exponere ingenio Copernici reservabatur. Galilæus Martem, & Venerem moveri circa Solem certissime ex eorumdem phasibus collegit. Totum vero Telluris motæ sistema novo hoc analogiæ argumento confirmatum ita in dialogis vindicavit, adornavitque, ut, qua in physicis rebus certitudine fieri poterat, ostenderit Planetas quinque primarios simul cum Terra motu periodico ab occidente in orientem revolvi circa Solem in planis transeuntibus per Solem ipsum, & parum dehiscentibus a se invicem: Lunam ab occidente pariter in orientem revolvi circa Solem, ut etiam quatuor Jovis Satellites a Galilæo ipso Telescopii a se inventi subsidio detecti volvuntur circa Jovem, & quinque Satellites Saturni, detecti postmodum ab Hugenio, & Cassino, volvuntur circa Saturnum: Terram diurno motu eadem directione torqueri circa axem proprium, & axem ipsum ita a parallelismo deflectere ut apparens alius habeatur stellarum fixarum motus, qui regressioni punctorum æquinoctialium, & præcessioni æquinoctiorum respondet.

Keplerus, cum periodica tempora Planetarum, & distantias mediocres a Sole attente comparasset inter se invicem, deprehendit quadrata temporum periodicorum proportionalia esse cubis mediocrium distantiarum. Detectis postmodum Satellitibus Jovis, & Saturni, eamdem legem temporum in singulis valere deprehensum est, periodica nimirum tempora inter se esse in ratione sesquiplicata distantiarum a centro Jovis, & Saturni. Lex vero in Planetis omnibus primariis, ac secundariis obtinet tam accurate ut si distantiæ & periodica tempora ex tabulis Astronomicis accipiantur, & primariorum distantiæ referantur ad radium terrestris orbitæ, accipianturque distantiæ Satellitum Jovialium in semidiametris Jovis, & distantiæ Satellitum Saturni in semidiametris annuli, differentiæ a Kepleriana lege sint ut in tabula sequenti.

Tem-

		Tempora periodica.	Distantiæ a centro.	Ex lege temporum.
Mercurii		87.9692.^{d}	3871.	3827.
Veneris		224.6176.	7233.3.	7233.
Terræ		365.2565.	10000.	10000.
Martis		686.9785.	15236.9.	15203.
Jovis		4332.5140.	52009.8.	51980.
Saturni		10759.2750.	95400.7.	95302.
Satellitum Jovis	I.	1.^{d} 18.^{h} 27.^{l} 33.^{ll}	5.67.	5.667.
	II.	3. 13. 13. 42.	9.	9.017.
	III.	7. 3. 42. 33.	14.38.	14.384.
	IV.	16. 16. 32. 8.	25.30.	25.299.
Satellitum Saturni	I.	1. 21. 18. 27.	1.93.	1.93.
	II.	2. 17. 44. 22.	2. 5.	2.47.
	III.	4. 12. 25. 12.	3. 5.	3.45.
	IV.	15. 22. 34. 38.	8.	8.
	V.	79. 7. 47. 0	23.	23.23.

Ipse etiam Keplerus diuturna cæli observatione excentricis vetustiorum Astronomorum circulis ellipticas orbitas substituit, in quarum communi foco esset Sol, & quarum perimetri ita a Planetis singulis describerentur, ut a maxima Solis distantia, quam summam apsidem, & aphelium vocant, transeundo ad minimam, quam appellant imam apsidem, & perihelium, semper celeriores fierent Planetæ alia illa lege, ut non quidem anguli, sed areæ circa Solem descriptæ æquali tempore pro distantiis quibuslibet æquales essent, atque universim areæ essent temporibus proportionales. Eadem lege Lunam circa Terram revolvi compertum est ut ab apogæo ad perigæum transeundo ipsius celeritas quam proxime augeatur in ratione reciproca perpendiculi ex foco in tangentem demissi, nec nisi exiguæ irregularitates aliæ lunarium motum habeantur, quæ perturbatricibus Solis viribus debent tribui. Satellitum Jovis, & Saturni orbitæ, cum propius ad circulos accedant, proportionem temporum, ac arearum, angulorumque circa centrum descriptorum magis accuratam, & regularem exhibent. Cometæ licet in ellipsibus prælongis, & ad pa-

parabolas proxime accedentibus, a minimis usque ad maximas a Sole distantias abeant, areas tamen circa Solem describunt temporibus proportionales. Duabus his Keplerianis legibus, quæ rationem arearum, & periodicorum temporum definiunt, superstruxit Newtonus theoriam omnem gravitatis quantitati materiæ directe, & quadratis distantiarum reciproce proportionalis, demonstravitque planetarum orbitas vere esse ellipticas, & aberrationes ab orbitis ellipticis accuratissime supputare docuit, & totum cæli opificium explicavit.

Postquam autem ob angularis, & absoluti motus inæquabilitatem agnoverat Keplerus Planetæ cujusque locum assignari non posse ad datum quodcumque tempus, nisi capiendo aream proportionalem tempori, proposuit celebre problema, quo inquiritur positio rectæ transeuntis per focum ellipseos, & abscindentis aream, quæ ad totam aream ellipseos se habeat in ratione data. Angulum dato tempore in orbita elliptica descriptum circa focum appellavit Keplerus anomaliam Planetæ veram: & anomaliam mediam vocavit angulum, qui sit ad quatuor rectos ut area elliptica dato tempore descripta circa focum ad totam aream ellipseos: ac denique differentiam utriusque anomaliæ, quæ inæquabilitatem motus Planetæ exprimit, vocavit æquationem centri. Quare Kepleri problema eo redit ut data anomalia media quæratur vera. Cum autem Geometria tunc temporis accurate solvendis hisce problematis impar esset, Keplerus indirecta methodo falsæ positionis, & approximationibus quibusdam usus, accuratæ, & directæ solutionis gloriam aliis Geometris reliquit. Antequam generalem theoriam corporum in sectionibus conicis motorum explicemus per partes singulas, atque inde ad supputandas inæqualitates ortas ex mutua aliorum corporum attractione progrediamur, lemmata quædam Trigonometrica præmittere oportebit, quorum in investigationibus sequentibus, & maxime in theoria Lunari frequentissimus erit usus.

LEMMATA.

I. Quia sinus anguli, qui exæquet summam, aut differentiam duorum angulorum, ex notis Trigonometriæ planæ elementis, æquatur summæ, aut differentiæ duorum productorum sinus anguli unius in cosinum anguli alterius divisæ per sinum totum: cosinus vero æquatur differentiæ, aut summæ productorum utriusque cosinus, & utriusque sinus per sinum totum pariter divisæ; si sinus totus

tus unitate exprimatur, & bini anguli addendi, aut subtrahendi sint x, & z, quatuor eæ formulæ habebuntur.

$$\text{sin.}\ \overline{x+z} = \text{sin.}\ x.\ \text{cos.}\ z + \text{cos.}\ x.\ \text{sin.}\ z$$

$$\text{cos.}\ \overline{x+z} = \text{cos.}\ x.\ \text{cos.}\ z - \text{sin.}\ x.\ \text{sin.}\ z$$

$$\text{sin.}\ \overline{x-z} = \text{sin.}\ x.\ \text{cos.}\ z - \text{cos.}\ x.\ \text{sin.}\ z$$

$$\text{cos.}\ \overline{x-z} = \text{cos.}\ x.\ \text{cos.}\ z + \text{sin.}\ x.\ \text{sin.}\ z$$

II. Si in peculiari aliquo casu fuerit z angulus satis parvus, & cos. z censeri possit proxime æqualis radio, ac sin. z proxime æquetur arcui, qui angulum ipsum metitur, fiet in tertia præcedenti formula sin. $\overline{x-z} = \text{sin.}\ x - z.\ \text{cos.}\ x$. Accuratius autem si fiat cos. $z = \sqrt{(1-z^2)} = 1 - \frac{1}{2}z^2$, erit

$$\text{sin.}\ \overline{x-z} = \text{sin.}\ x - z.\ \text{cos.}\ x - \tfrac{1}{2}z^2\ \text{sin.}\ x$$

$$\text{cos.}\ \overline{x-z} = \text{cos.}\ x + z.\ \text{sin.}\ x - \tfrac{1}{2}z^2\ \text{cos.}\ z:$$

& si angulus propositus fuerit $x+z$, in utraque formula terminus, qui per z multiplicatur, inverso signo debebit accipi.

III. Universim vero erit $\dfrac{\text{sin.}\ \overline{x-z}}{\text{cos.}\ \overline{x-z}} = \text{tang.}\ \overline{x-z} =$

$\dfrac{\text{sin.}\ x.\ \text{cos.}\ z - \text{cos.}\ x.\ \text{sin.}\ z}{\text{cos.}\ x.\ \text{cos.}\ z + \text{sin.}\ x.\ \text{sin.}\ z}$: & cum sit sin. $x = \text{tang.}\ x.\ \text{cos.}\ x$, ac pariter sin. $z = \text{tang.}\ z.\ \text{cos.}\ z$, reductis terminis erit

$$\text{tang.}\ \overline{x-z} = \frac{\text{tang.}\ x - \text{tang.}\ z}{1 + \text{tang.}\ x\ \text{tang.}\ z}$$

$$\text{tang.}\ \overline{x+z} = \frac{\text{tang.}\ x + \text{tang.}\ z}{1 - \text{tang.}\ x.\ \text{tang.}\ z}.$$

IV. Si prima, ac tertia formula, ac deinde secunda, & quarta conjiciantur in unam summam, subtrahanturque postmodum a se invicem, quatuor aliæ formulæ habebuntur

$$\text{sin.}\ x.\ \text{cos.}\ z = \tfrac{1}{2}.\ \text{sin.}\ \overline{x+z} + \tfrac{1}{2}.\ \text{sin.}\ \overline{x-z}$$

$$\text{cos.}\ x.\ \text{cos.}\ z = \tfrac{1}{2}.\ \text{cos.}\ \overline{x+z} + \tfrac{1}{2}.\ \text{cos.}\ \overline{x-z}$$

$$\text{sin.}\ x.\ \text{sin.}\ z = \tfrac{1}{2}.\ \text{cos.}\ \overline{x-z} - \tfrac{1}{2}.\ \text{cos.}\ \overline{x+z}$$

$$\text{cos.}\ x.\ \text{sin.}\ z = \tfrac{1}{2}.\ \text{sin.}\ \overline{x+z} - \tfrac{1}{2}.\ \text{sin.}\ \overline{x-z}.$$

V. Si anguli x, & z sumantur inter se æquales, & sit propterea $\text{sin.}\,\overline{x-z}=0$, & $\text{cos.}\,\overline{x-z}=1$, posteriores formulæ abibunt in has alias

$$\text{sin.}\,z.\,\text{cos.}\,z=\tfrac{1}{2}.\,\text{sin.}\,2z$$

$$\text{cos.}\,z^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}.\,\text{cos.}\,2z$$

$$\text{sin.}\,z^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}.\,\text{cos.}\,2z,$$

quæ quantitas exprimit dimidium sinum versum anguli z bis accepti.

VI. Si cosinus anguli z vocetur X, ducaturque is successive in se ipsum, & potentiæ ita prodeuntes, ope formularum præcedentium, resolvantur in partes, in quibus dumtaxat occurrant cosinus anguli z aliquoties accepti, fiet

$$X^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\,\text{cos.}\,2z$$

$$X^3=\frac{3}{4}.\,\text{cos.}\,z+\frac{1}{4}.\,\text{cos.}\,3z$$

$$X^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}.\,\text{cos.}\,2z+\frac{1}{8}.\,\text{cos.}\,4z$$

$$X^5=\frac{5}{8}.\,\text{cos.}\,z+\frac{5}{16}.\,\text{cos.}\,3z+\frac{1}{16}.\,\text{cos.}\,5z$$

$$X^6=\frac{5}{16}+\frac{15}{32}.\,\text{cos.}\,2z+\frac{3}{16}.\,\text{cos.}\,4z+\frac{1}{32}.\,\text{cos.}\,6z$$

$$X^7=\frac{35}{64}.\,\text{cos.}\,z+\frac{21}{64}.\,\text{cos.}\,3z+\frac{7}{64}.\,\text{cos.}\,5z+\frac{1}{64}.\,\text{cos.}\,7z$$

$$X^8=\frac{35}{128}+\frac{7}{16}.\,\text{cos.}\,2z\ \&c.$$

VII. Jam vero elementum circularis arcus æquatur elemento cosinus per radium ducto, ac per sinum rectum arcus ipsius diviso: & elementum sinus æquatur elemento circularis arcus per cosinum multiplicato: scilicet si radius ut antea exprimatur unitate, & sit angulus, sive arcus z, cosinus arcus ipsius X, quia elementa arcus, & cosinus signo contrario debent accipi, erit

$$dz=\frac{-dX}{\sqrt{(1-X^2)}},\ \&\ X.\,dz=d\sqrt{(1-X)}.$$ Quare summa om-

omnium $X \cdot dz$, five fumma omnium cofinuum, qui in circulari quocunique arcu poffunt accipi, æqualis erit finui recto ipfius arcus: & fumma omnium $\surd(1 - X^2) \cdot dz$ erit $1 - X$, five fumma omnium finuum per elementum circularis arcus ductorum æqualis erit finui verfo arcus. Et fi loco anguli, five arcus z accipiatur multiplus quicumque mx, fimili modo prodibit

$$\text{I} . dz . \text{cof.} mz = \frac{1}{m} . \text{fin.} mz$$

$$\text{I} . dz . \text{fin.} mz = \frac{1 - \text{cof.} mz}{m} .$$

VIII. Ita igitur fumma omnium cof. $2z$, cof. $4z$, cof. $6z$ in toto circulari arcu acceptorum erit $\frac{1}{2}$. fin. $2z$, $\frac{1}{4}$. fin. $4z$, $\frac{1}{6}$. fin. $6z$: & cum finus arcuum $2z$, $4z$, $6z$ poft fingulos quadrantes evanefcant, fumma omnium X^2, X^4, X^6 in tota peripheria circuli acceptorum, juxta §. VI., folis conftantibus quantitatibus exprimetur. At fi ratio peripheriæ ad radium fit $p : 1$, fumma omnium $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ &c. in tota peripheria circuli erit ordine $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{8}p$, $\frac{5}{16}p$ &c. Erit ergo fumma omnium $X^0 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8$ &c. $=$ $p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{35}{128} \text{ \&c.}\right)$: aut fi prior terminus feriei hujus vocetur A, fecundus B, tertius C &c., & valor præcedentis termini in fubfequenti alio fubftituatur, fiet fumma eadem $p + \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}B + \frac{5}{6}C + \frac{7}{8}D$ &c. Univerfim fi n defignet numerum quemcumque parem, fumma poteftatum omnium X^n in integra peripheria circuli æqualis erit fummæ poteftatum ordine præcedentium X^{n-2} ductæ in $\frac{n-1}{n}$.

IX. Si Z fit finus anguli, cujus cofinus eft X, cum juxta §. I. fit $XZ = \frac{1}{2}$. fin. $2z$, & juxta §. VII. fumma omnium $\frac{1}{2}$. fin. $2z$ fit $\frac{1 - \text{cof.} 2z}{4}$, cumque infuper poft quadrantem fit $-$cof.$2z = +1$, fiet in tota peripheria fumma rectangulorum omnium $XZ = 2$. Pariter cum fit $X^2 Z^2 = X^2 . \overline{1 - X^2}$, acceptis fummis omnium

X^2, X^4, iisque a se invicem subductis, fiet summa omnium $X^2 Z^2 = \frac{1}{8} p$. Simili ratione summa omnium $X^4 . Z^2$, $X^4 Z^4$, $X^6 Z^2$ invenietur ordine $\frac{1}{16} p$, $\frac{3}{128} p$, $\frac{5}{128} p$. Quod si valores isti variarum sinus, & cosinus potestatum in integra peripheria circuli similiter acceptarum dividantur per totam peripheriam, prodibit valor medius potestatum singularum, quo valore per totam peripheriam uniformiter continuato æqualis summa conficeretur: scilicet valores medii potestatum hujusmodi erunt ordine ut sequitur

$$XZ, \quad X^2, \quad X^2Z^2, \quad X^4, \quad X^6, \quad X^4Z^2, \quad X^8, \quad X^4Z^4, \quad X^6Z^2$$

valores medii

$$2.\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{35}{128}, \quad \frac{3}{128}, \quad \frac{5}{128}.$$

X. Si sint a, b, c, m constantes quantitates, t vero, & z variabiles, & proponatur æquatio differentialis secundi ordinis, & hujus formæ

$$ddt + a^2 t . dz^2 = b . dz^2 + c . dz^2 . \text{cos. } mz;$$

terminis singulis in cos. az ductis, ut fiat

$$ddt . \text{cos. } az + a^2 t . dz^2 \text{cos. } az = bdz^2 . \text{cos. } az + \tfrac{1}{2} c . dz^2 . \text{cos. } \overline{az \pm mz},$$

patebit exsurgere ipsam ex æquatione alia primi ordinis

$$dt . \text{cos. } az + at . dz . \text{sin. } az = f . dz + \frac{b . dz}{a} . \text{sin. } az + \tfrac{1}{2} . c . dz . \frac{\text{sin. } az \pm mz}{a \pm m},$$

eritque f quantitas constans, quæ debebit addi si posito $z = 0$ non sit etiam $\frac{dt}{dz} = 0$. Posteriore autem termino juxta §. I. resoluto in binos alios $\frac{ac . \text{sin. } az . \text{cos. } mz}{a^2 - m^2} - \frac{cm . \text{cos. } az . \text{sin. } mz}{a^2 - m^2}$, divisisque terminis omnibus per $\overline{\text{cos. } az}^2$, ac rursus integrando exsurget finita æquatio

$$\frac{t}{\text{cos. } az} = h + \frac{f . \text{sin. } az}{a . \text{cos. } az} + \frac{b}{a^2 . \text{cos. } az} + \frac{c . \text{cos. } mz}{(a^2 - m^2) \text{cos. } az}.$$

Quod si in ipso variationum omnium initio, ut in casu problematum

tum subsequentium, posito $z = o$, fit etiam $t = o$, & $f = o$, atque in postrema hac æquatione, posito cos. $mz =$ cos. $az = 1$, supersit $\frac{b}{a^2} + \frac{c}{a^2 - m^2}$, erit integrationis postremæ constans $h = -\frac{b}{a^2} - \frac{c}{a^2 - m^2}$, ac fiet ultimo

$$t = \frac{b}{a^2} . (1 - \text{cos. } az) + c . \frac{\text{cos. } mz - \text{cos. } az}{a^2 - m^2} .$$

XI. Eadem calculi serie, iisdem reductionibus repetitis, ex æquatione differentiali

$$ddt + a^2 t . dz^2 = b . dz^2 + c . dz^2 . \text{cos. } \overline{mz + n},$$

posita n constanti, eruetur integralis æquatio

$$t = \frac{b}{a^2} . (1 - \text{cos.} az) + \frac{c . \text{cos.} \overline{mz + n}}{a^2 - m^2} - \frac{c}{2a} \left(\frac{\text{cos.} \overline{n + az}}{a - m} + \frac{\text{cos.} \overline{n - az}}{a + m} \right).$$

Eadem etiam ratione si proponatur æquatio alia

$$\frac{ddt}{dz^2} + a^2 t = b + c . \text{cos. } mz + g . \text{cos. } nz$$

post geminam integrationem prodibit

$$t = \frac{b}{a^2} . (1 - \text{cos. } az) + c . \frac{\text{cos. } mz - \text{cos. } az}{a^2 - m^2} + g . \frac{\text{cos. } nz - \text{cos. } az}{a^2 - n^2} ;$$

ac generatim additis aliis quotcumque consimilis formæ terminis, in æquatione integrata coefficiens termini uniuscujusque erit ipse coefficiens, qui in æquatione differentiali occurrit, divisus per differentiam coefficientis secundi termini a^2, & quadrati m^2, aut n^2 coefficientis anguli variabilis: coefficiens autem illius termini, qui pro argumento habebit cos. az, erit summa aliorum omnium coefficientium inverso signo acceptorum. Ita vero integratione eo magis augebitur coefficiens, quo propius ad æqualitatem accedent quantitates a, & m, aut n, minoresque erunt fractiones $a^2 - m^2$, $a^2 - n^2$ &c. Et sicuti in integrationibus illius formæ, quam §. VII. indicavimus, eorum præcipue terminorum habenda erit ratio, in quibus coefficiens anguli variabilis est quantitas aliqua exigua; ita in posterioris hujus formæ integrationibus ii diligentius supputandi

tandi erunt termini, in quibus coefficiens anguli variabilis ad coefficientem secundi æquationis differentialis termini proxime accedet.

XII. Si sit $a^2 = m^2$, reassumendo æquationem $\frac{ddt}{dz^2} + a^2 t = c.\, \text{cos.}\, az$, ipsamque multiplicando per sin. az ut prodeat $ddt.\, \text{sin.}\, az + a^2 t.\, dz^2.\, \text{sin.}\, az = \frac{1}{2} c.\, dz^2.\, \text{sin.}\, 2az$, primo emerget $dt.\, \text{sin.}\, az - at.\, dz.\, \text{cos.}\, az = \frac{1}{4}.\, c.\, dz.\, (1 - \text{cos.}\, 2az)$: & omnia dividendo per $\overline{\text{sin.}\, az}^2$, sive per $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2az$, ac rursus integrando prodibit $t = \frac{1}{2} cz.\, \text{sin.}\, az$: qui terminus, posito sin. $az = 0$, evanesceret, aliis autem in locis, aucto arcu z, fieri posset utcumque magnus. Quod si denique in æquatione differentiali adderetur terminus aliquis formæ $cz.\, dz^2$, cum sit $cz = \frac{c.\, \text{sin.}\, cz}{c}$, si quantitas b adeo exigua assumatur ut possit negligi ipsius quadratum, ac sit sinus æqualis arcui; eadem methodo procedendo in æquatione integrata oporteret addere $\frac{c.\, \text{sin.}\, cz}{c.\, (a^2 - c^2)} = \frac{c.\, \text{sin.}\, cz}{c.\, a^2} = \frac{cz}{a^2}$, atque ita æquatio terminum alium involveret circulari arcui z accurate proportionalem. Simili modo ex differentiali termino $cz^2.\, dz^2$ pro æquatione integrata erueretur terminus $\frac{2cz^3}{a^2}$. Eulerus, qui etiam calculi sinuum author est, hujus generis æquationes integrare cœpit Cap. VI. Differt. de fluxu, & refluxu maris. Generalem integrandi methodum Alembert in actis Berol. Acad. anni 1748, & 1750, Melander in lineamentis theoriæ lunaris Parmæ editis, atque authores alii tradiderunt. Ejusdem generis cum sit æquatio, qua generaliter in Lib. IV. lunarem orbitam definiemus, integrationis methodum brevissime exponere, & subsequentibus investigationibus aptare hoc in loco necesse erat.

CA-

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU CORPORUM IN ORBITIS CIRCULARIBUS.

THEOREMA I.

Vires centripetæ corporum motu æquabili circulos deſcribentium diriguntur ad centra circulorum, & ſunt inter ſe directe in ratione ſimplici radiorum, & reciproce in duplicata ratione periodicorum temporum.

Sint ABH, *abh*, fig. 19., bini circuli circa centra C, *c* æquabiliter deſcripti, & ſint AB, *ab* elementa arcuum eodem tempore abſolutorum, tangentes AD, *ad*, ſinus verſi AE, *ae*. Manifeſtum eſt primo utrumque corpus ſibi relictum in A, & *a*, velocitate omni, qua ibidem pervenit, excurrere debere per tangentes AD, *ad*, nec poſſe ad circularis peripheriæ puncta B, *b* deflecti dato tempore, niſi ſpatiis AE, *ae* a tangentibus retrahatur, hoc eſt niſi in punctis ſingulis A, *a* vi aliqua ſecundum radios AC, *ac* impellatur ad centra C, *c*. Patet deinde vires centripetas in A, *a* proportionales eſſe ſpatiis AE, *ae* centrum verſus eodem tempore percurſis, ſive eſſe inter ſe vires ut $\frac{AB^2}{AC} : \frac{ab^2}{ac}$. Cum igitur arcus AB, *ab* eodem tempore æquabiliter deſcripti proportionales ſint circularis motus velocitatibus, ſi velocitates ipſæ ſint V, *v*, circulorum radii R, *r*, vires centripetæ G, *g*, erit $G : g = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$. Sunt autem velocitates directe ut ſpatia æquabiliter deſcripta, & reciproce ut tempora quibus deſcribuntur: & ſpatia ſingulis revolutionibus æquabiliter percurſa ſunt ipſæ circulorum peripheriæ: peripheriæ vero ſunt radiis proportionales. Quare ſi tempora periodica ſint T, *t*, erit $V : v = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeoque etiam $G : g = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$.

Co-

Corollarium I.

Binæ hujus theorematis analogiæ $G : g = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ quatuor alia suppeditant theoremata : I. si tempora periodica sint æqualia, erunt vires centripetæ ut radii : II. si sint æquales velocitates, erunt vires ut radii reciproce : III. si radii sint æquales, erunt vires in ratione duplicata velocitatum : IV. si æquales sint vires, erunt radii reciproce in duplicata ratione velocitatum, sive directe in duplicata ratione temporum integrarum revolutionum. In eodem etiam circulo, data projectionis velocitate, radius variabitur in ratione reciproca vis centripetæ : & data vi centripeta radius variabitur in duplicata ratione velocitatis. .

Corollarium II.

Generatim si tempora periodica sint ut radiorum potestas quævis exponentis n, hoc est si sit $T : t = R^n : r^n$, erit $V : v = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}}$, adeoque etiam $G : g = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = \frac{1}{R^{2n-1}} : \frac{1}{r^{2n-1}}$. Quare si sit $n = \frac{1}{2}$, nimirum si tempora periodica sint in ratione radiorum subduplicata, velocitates pariter erunt in ratione subduplicata radiorum, & vires centripetæ æquales erunt inter se : & si vires centripetæ sint ut radii, erit $n = 0$, hoc est æqualia erunt tempora perodica, & velocitates pariter erunt radiis proportionales.

Corollarium III.

Si sit $n = \frac{3}{2}$, hoc est si tempora periodica sint in ratione radiorum sesquiplicata, & quadrata eorumdem temporum sint in ratione triplicata radiorum, erit $V : v = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}$, & $G : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, nimirum velocitates erunt reciproce in ratione radiorum subduplicata, & vires centripetæ erunt reciproce in ratione duplicata radiorum. Vicissim si vires centripetæ sint ut quadrata radiorum reciproce, erunt quadrata temporum periodicorum directe ut radiorum cubi. Data etiam hac lege velocitatis si in eodem circulo varietur projectionis velocitas, & juxta Coroll. I. varietur radius in duplicata ra-

ratione velocitatis, periodicum tempus variabitur in triplicata ratione ipsius velocitatis.

COROLLARIUM IV.

Cum igitur quadrata temporum periodicorum Planetarum primariorum circa Solem, & Satellitum Jovis circa Jovem, & Satellitum Saturni circa Saturnum sint inter se ut cubi mediocrium distantiarum a centro Solis, Jovis, & Saturni, cumque Satellitum eorumdem orbitæ quam proxime circulares sint, atque orbitæ Planetarum non admodum differant a circulis; vires centripetæ Planetarum primariorum in Solem erunt reciproce ut quadrata mediocrium distantiarum a centro Solis: & vires centripetæ Satellitum Jovis, aut Saturni erunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro, ad quod tendunt, Jovis ipsius, aut Saturni.

COROLLARIUM V.

Pariter cum Luna periodum suam absolvat tempore minutorum 39343, & 60 circiter semidiametris a Terra distet, ac Terræ ambitus statui possit pedum Parisiensium 12346900; sinus versus illius arcus, quem Luna unius minuti tempore describit, erit circiter pedum $15\frac{1}{12}$: cumque idem sinus versus exprimat vim centripetam, & juxta §. IV., & V. Introd. pedes $15\frac{1}{12}$ prope terrestrem superficiem a corpore decidente absolvantur tempore minuti unius secundi, atque uno minuto primo absolvi debeant pedes $60^2 \cdot 15\frac{1}{12}$; vires etiam centripetæ Lunæ, & terrestrium corporum in Terram reciproce inter se erunt ut quadrata distantiarum a centro Terræ.

THEOREMA II.

Si vis centripeta sit constans, corpus per dimidium radium cadendo acquiret velocitatem æqualem illi, qua in circulo ejusdem radii uniformiter circa centrum revolvi posset.

Cum enim velocitas, quæ constanti vi gravitatis tendente ad centrum C, fig. 19., per sinum versum AE libere decidendo motu uniformiter accelerato acquiri posset, ea sit, qua duplum spatium eodem tempore æquabiliter posset absolvi; coeuntibus punctis A, & B velocitas ipsa ad velocitatem circularis motus se habebit ut $2AE : AB = 2AE : \sqrt{2AE.R} = \sqrt{2AE} : \sqrt{R}$. Insuper, juxta

§.

§. IV. Introd., in hypothesi gravitatis constantis velocitas, quæ per sinum versum AE cadendo acquiritur, esset ad velocitatem, quæ acquiri posset cadendo per aliam quamlibet altitudinem AG ut $\sqrt{AE} : \sqrt{AG}$. Compositis igitur rationibus velocitas, qua elementaris arcus AB describitur, sive qua corpus uniformiter in circulo revolvitur, erit ad velocitatem lapsus per spatium quodcumque AG in subduplicata ratione R : 2AG, &, quo in loco G velocitas liberi descensus velocitati circularis motus æquabitur, erit $AG = \frac{1}{2} R$: nimirum corpus per dimidium radium cadendo, eadem vi centripeta, quam habet in data a centro distantia, acquiret velocitatem, qua in data ipsa distantia circulum uniformiter circa centrum posset describere.

Corollarium I.

Quia in motu æquabili spatia descripta sunt proportionalia temporibus, & quo tempore dimidius radius describitur motu uniformiter accelerato, velocitate ultimo acquisita totus radius describi posset; tempus integræ revolutionis in circulo erit ad tempus descensus per dimidium radium, ut peripheria circuli ad radium: & quia tempus unius oscillationis in cycloide est ad tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli ut peripheria ad diametrum; si longitudo penduli radio circuli æquetur, tempus unius oscillationis in cycloide dimidium erit temporis integræ revolutionis in eodem circulo.

Corollarium II.

Et quia insuper tempus, quo circularis arcus quicumque AQ describitur, est ad tempus integræ revolutionis in circulo ut radius ipse ad peripheriam: & tempus integræ revolutionis est ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium ipsum: tempus autem descensus per dimidium radium est ad tempus descensus per spatium aliud quodcumque AG in subduplicata ratione radii ad 2AG; tempus, quo describitur arcus AQ erit ad tempus descensus per AG ut $AQ : \sqrt{2AC . AG}$.

Corollarium III.

Si tempora hujusmodi æqualia sint inter se, erit $AQ^2 = 2AC . AG$, nimirum circularis arcus dato tempore uniformiter descriptus erit me-

medius proportionalis inter diametrum circuli, & ſpatium quod corpus eodem tempore ob ſolam vim centripetam deſcriberet. Denique ſi GR ſit perpendicularis diametro in puncto G, jungaturque AR, ob $AR^2 = 2AC \cdot AG$, chorda ipſa AR æquabitur arcui AQ uniformiter deſcripto quo tempore ſpatium AG ob ſolam vim centripetam deſcribi poſſet.

Theorema III.

Velocitas corporis centro C, & radio AC circulum deſcribentis, fig. 3., ad velocitatem acquiſitam libere decidendo ex A in B, in hypotheſi gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ ſe habebit ut AC : BM, in hypotheſi vero gravitatis diſtantiarum quadratis reciproce proportionalis erit in ratione ſubduplicata BC : 2AB.

Nam per ſuperius theorema velocitas corporis circa C ad diſtantiam AC circulum deſcribentis æqualis eſt velocitati, quæ conſtanti vi gravitatis agentis in loco A acquiri poſſet cadendo per $\frac{1}{2}$ AC. At juxta §. IV. Introd. velocitas deſcenſus per $\frac{1}{2}$ AC eſt ad velocitatem in eadem gravitatis hypotheſi acquiſitam deſcendendo per ſpatium aliud quodcumque AB in ratione ſubduplicata $\frac{1}{2}$ AC : AB: & juxta §. VIII. velocitates per AB acquiſitæ in duabus hypotheſibus gravitatis conſtantis, & gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ a centro ſunt inter ſe ut $\sqrt{2AC \cdot AB} : BM$: ac pariter juxta §. X. velocitates acquiſitæ in duabus hypotheſibus gravitatis conſtantis, & gravitatis reciproce proportionalis quadratis diſtantiæ a centro ſunt inter ſe in ratione ſubduplicata BC : AC. Quare compoſitis rationibus circularis motus velocitas in hypotheſi gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ a centro erit ad velocitatem acquiſitam deſcenſu per AB ut AC : BM, in hypotheſi vero gravitatis diſtantiæ quadratis reciproce proportionalis ſe habebit in ratione ſubduplicata BC : 2AB.

Corollarium I.

Si gravitas in loco A exprimatur unitate, varieturque in ratione ſimplici diſtantiæ, juxta §. VI., erit in loco B velocitas deſcenſus = BM, & circularis motus velocitas = AC, ac tempus, quo deſcribetur arcus quicumque AM, erit $= \frac{AM}{AC}$, æquale ſcili-

cet tempori descensus ex A in B, & totum tempus descensus usque ad centrum C æquale erit quartæ parti revolutionis in circulo radii AC. Et quia in eadem hypothesi gravitatis, per Coroll. II. Theor. I., æqualia sunt tempora periodica omnium corporum circa idem centrum circulos describentium, tempora etiam descensus liberi ad centrum ex quibusvis altitudinibus erunt inter se æqualia.

Corollarium II.

Si gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ, & in loco A exprimatur unitate, ac fiat pariter $AC = 1$, juxta §. IX. erit velocitas descensus ex A in $B = \sqrt{\left(\frac{2\,AB}{BC}\right)}$. Quare etiam velocitas in circulo radii AC exprimetur unitate, & tempus, quo describetur quicumque arcus, exprimetur arcu ipso, ac tempus totius revolutionis erit 4AMD. Quare cum juxta §. XI. tempus descensus liberi ex A in C sit $\frac{AMD}{\sqrt{2}}$, tempus revolutionis integræ in circulo erit ad tempus descensus liberi per totum radium ut $4\sqrt{2} : 1$. Ita cum Luna $27^d\ 7^h\ 43'$ volvatur circa Terram, si fiat $4\sqrt{2} : 1 = 27^d\ 7^h\ 43' : 4^d\ 19^h\ 55\frac{1}{2}'$, hoc erit tempus, quo Luna libere decidendo ob vim centripetam, quæ sit reciproce ut quadratum distantiæ a centro, ad centrum usque perveniret.

Corollarium III.

Quia in eadem hypothesi gravitatis, per Coroll. III. Theor. I., velocitas corporum radiis AC, BC circulos describentium sunt inter se in ratione subduplicata AC: BC; velocitas libero lapsu per AB acquisita erit ad velocitatem, qua circulus circa C, & radio BC describi potest, in ratione subduplicata 2AB : AC, & si fiat $AB = \frac{1}{2} AC = FC$, velocitas corporis circulum describentis ea erit, qua ad duplam usque distantiam a centro e peripheria descripti circuli per rectam lineam posset ascendere. In eadem etiam gravitatis hypothesi, juxta idem tertium corollarium, cum periodica tempora in duobus circulis ad distantiam AC, & FC descriptis circa idem centrum sint inter se ut $2\sqrt{2} : 1$, tempus dimidiæ revolutionis in circulo radii FC æquabitur tempori totius descensus ex A in C.

Pro-

PROBLEMA I.

Eadem posita lege virium, & dato quod velocitates corporum circa idem centrum sese volventium sint in ratione subduplicata reciproca distantiarum, invenire apparentias motuum Planetæ unius visi ex altero.

Sint in fig. 2. TD, & PG spatia, quæ juxta tangentem orbitæ excurrendo Terra T, & Planeta P eodem tempore circa Solem S possent absolvere. Quia communi motu juxta parallelas directiones impresso variari nequit angularis motus corporis cujuslibet visi ex alio, eædem adhuc apparentiæ motuum habebuntur si Terram quiescere intelligamus in loco T, Planetæ vero imprimi velocitatem PC æqualem, contrariam, & parallelam velocitati Terræ TD. Tum autem completo parallelogrammo PGHC Planeta motu composito per diagonalem PH ferri videbitur ex Terra T, atque ex H in TP demisso perpendiculo HE, erit angularis Planetæ motus e Terra visus $\frac{HE}{TE}$, seu proxime $\frac{HE}{TP}$. Jam vero ex S, & G ductis perpendiculis aliis SM, GO, &, si opus sit, producta GH in h, ob similitudinem triangulorum SPM, PGO erit $GO = PG . \text{cos. SPM}$, atque ob similia pariter triangula STM, hGO erit $Gh = PG . \frac{\text{sin. GPO}}{\text{sin. G}h\text{O}} = PG . \frac{\text{cos. SPT}}{\text{cos. STP}}$. Erit insuper $HE = Hh . \text{sin. H}h\text{E} = Hh . \text{cos. STP}$, & $Hh = Gh \mp GH$, accepto superiore signo cum Planeta est citra Solem, & inferiore quando ultra Solem conspicitur e Terra. Quod si igitur Terræ velocitas accipiatur loco unitatis, fiet idem angularis Planetæ motus

$$\frac{Gh \mp GH}{TP} . \text{cos. STP} = \frac{PG . \text{cos. SPT} \mp TD . \text{cos. STP}}{TP}$$

$$= \frac{1}{TP}\left(\sqrt{\left(\frac{ST}{SP}\right)} . \text{cos. SPT} \mp \text{cos. STP}\right).$$

COROLLARIUM I.

Si Planeta sit Sole inferior, versetur que circa primam, inferioremque ipsius conjunctionem; contrariæ erunt directiones motuum PG, PC, & ob PG majorem quam PC, punctum H ultra rectam TP jacebit ad partes illas, in quas vere fertur Planeta, & cum Pla-

 neta

neta ſit infra Solem, in adverſas cum Sole partes ferri videbitur, nimirum videbitur retrogradus. Si Planeta ſuperior ſit, & circa oppoſitionem verſetur, ob contrarias pariter directiones PG, PC, & PG minorem quam PC, & Gh minorem pariter quam GH; punctum H jacebit ad partes adverſas illis, in quas tendit Planeta, & ipſe etiam retrogradus videbitur.

COROLLARIUM II.

In conjunctione Planetarum ſuperiorum cum Sole conſpirabunt directiones PG, PC, & Planetæ in eamdem ferentur plagam cum Sole, ſcilicet erunt directi: & cum Planetæ inferiores ultra Solem ad conjunctionem alteram properabunt perinde erit. Cumque Sole, Terra, & Planetis jacentibus in eadem recta ſit coſ. SPT $=$ coſ. STP $= 1$, erit in caſu utroque Planetæ ſuperioris, inferiorisque velocitas maxima directionis ad velocitatem maximam retrogradationis directe ut ſumma ad differentiam velocitatum abſolutarum Planetæ, ac Terræ, & reciproce ut ſumma ad differentiam diſtantiarum Planetæ, ac Terræ a Sole.

COROLLARIUM III.

Quo in loco habebitur ſtatio, ſublato apparenti motu, fiet $ST^{\frac{1}{2}}$. coſ. SPT $= SP^{\frac{1}{2}}$. coſ. STP: & ſi angulus STP apparentis diſtantiæ Planetæ a Sole vocetur X, & ſit ST $= R$, SP $= r$, SM $= R$. ſin. X, & coſ. SPT $=$ coſ. SPM $= \frac{1}{r}\sqrt{(r^2 - R^2 . \text{ſin. } X^2)} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}$. coſ. X; quadrando utrimque & tranſpoſitis terminis radicem extrahendo fiet ſin. X $= \pm\, r . \sqrt{\left(\frac{R - r}{R^3 - r^3}\right)}$. Quod ſi inſuper periodica tempora Terræ, & Planetæ ſint T, & t, ob $R : r = T^{\frac{2}{3}} : t^{\frac{2}{3}}$, fiet etiam ſin. X $= \pm\sqrt{\left(\frac{t\sqrt[3]{T^2 t} - t^2}{T^2 - t^2}\right)}$.

COROLLARIUM IV.

Si ratio periodicorum temporum Veneris, & Terræ circa Solem aſſumatur $\frac{2246176}{3652565} = 0.615$, factis ſubſtitutionibus, prodibit $28°\ 50'$ angularis diſtantia ſtationariæ Veneris a Sole. In ſuperioribus autem

tem Planetis eadem formula eruetur ſinus complementi ad duos rectos illius anguli, ſub quo ſtationis locus habebitur, ac fiet pro Marte quidem angulus 136°, pro Jove 115°, & pro Saturno 109° circiter, & cum ob parvitatem excentricitatis Veneris ſatis accuratus ſtationis calculus cenſeri poſſit, in aliis Planetarum ſuperiorum orbitis non æque cum obſervationibus calculus conveniet.

PROBLEMA II.

Iiſdem poſitis, & dato inſuper quod vires centripetæ corporum circa diverſa centra circulariter ſe volventium, paribus ab unoquoque centro diſtantiis, proportionales ſint maſſis centralibus, invenire maſſarum earumdem proportionem.

Sint t, & T periodica tempora Satellitis L circa primarium Planetam P, fig. 21., & primarii ejuſdem circa Solem S, ac ſint r, R radii duarum orbitarum, & ratio maſſarum Planetæ primarii, & Solis ſit $1 : M$. Tum ſi vires centripetæ g, G paribus ab unoquoque centro diſtantiis ſint ut maſſæ in centro poſitæ, auctis vero, ſive imminutis diſtantiis varientur in duplicata reciproca ratione diſtantiarum, erit $g : G = \frac{1}{r^2} : \frac{M}{R^2}$, & cum per Theor. I. ſit etiam $g : G = \frac{r}{t^2} : \frac{R}{T^2}$; erit $1 : M = \frac{r^3}{t^2} : \frac{R^3}{T^2}$. Quod ſi inſuper ſit m ſinus maximi anguli LSP, quem radius orbitæ Satellitis ſubtendit ad Solem S, ſeu ſinus maximæ elongationis heliocentricæ Satellitis L a primario Planeta P, ac ſit propterea $PL = r = m . R$, fiet maſſæ utriuſque ratio $m^3 . \frac{T^2}{t^2} : 1$. Denique ſi ſit p ſinus anguli, quem ſemidiameter Planetæ P e Sole viſa ſubtendit, ſeu ſinus parallaxeos mediocris Solis, & ſit q ſinus ſemidiametri Planetæ ejuſdem viſæ e Satellite, ſeu ſinus parallaxeos Satellitis, erit $p : q = PL : PS = m . PS : PS = m : 1$, ac fiet eadem maſſarum ratio $\frac{p^3}{q^3} . \frac{T^2}{t^2} : 1$, eodemque modo primariorum Planetarum maſſæ, circa quos Satelles aliquis volvitur, comparari poterunt inter ſe.

COROLLARIUM I.

Si parallaxis mediocris Solis cum Newtono ſtatuatur $10\frac{1}{2}''$, dia-

diameter apparens Lunæ $31' \, 16\frac{1}{2}''$, proportio veræ diametri Lunæ ad veram Terræ diametrum 100 : 365, adeoque sit Terræ semidiameter visa e Luna $57' \, 4'' \, 37'''$, & maxima elongatio Lunæ a centro Terræ $10' \, 33''$, cujus sinus est 0.003068866, fiet juxta priorem formulam ratio quantitatis materiæ in Sole, & Terra

$$1 : (0.003068866)^2 \left(\frac{365^d \; 6^h \; 9'}{27^d \; 7^h \; 43'}\right)^2 = 100000000 : 516\tfrac{1}{2},$$ &

quia juxta formulam alteram Telluris massa variari debet in triplicata ratione parallaxeos Solis, si parallaxis statuatur $9''$, fiet massa eadem dumtaxat 326.

Corollarium II.

Pariter si maxima elongatio heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis a centro Solis sit $8' \; 16''$, & quarti Satellitis Saturni a Saturni centro $3' \; 4''$, sint autem tempora periodica duorum Satellitum circa primarios, & Jovis, ac Saturni circa Solem, ut supra indicatum est; fiet ratio massarum Solis, Jovis, & Saturni 1000000, 937, 331. Quod si vero elongatio maxima heliocentrica quarti Jovis Satellitis a Jove, sive semidiameter orbitæ ipsius Satellitis e Sole visa cum Cassino statuatur $8\frac{1}{4}'$, & semidiameter orbitæ quarti Satellitis Saturni $3'$; evadent massæ Jovis, & Saturni 1112, & 303.

Corollarium III.

Sunt autem quantitates materiæ in ratione composita voluminum, & densitatum, ac sunt volumina ut cubi diametrorum, adeoque densitates sunt directe ut massæ, & reciproce ut cubi diametrorum. Quod si igitur parallaxis Solis sit $10\frac{1}{2}''$, & ratio semidiametrorum Solis, Jovis, Saturni, ac Terræ cum Newtono statuatur 10000, 997, 791, & 109, fiet densitatum ratio 100, $94\frac{1}{2}$, 67, & 351: nimirum Sol paulo densior erit quam Jupiter, eritque densitas Solis ad Saturni densitatem quam proxime ut 3 : 2, & ad densitatem Terræ ut 2 : 7. Eadem autem manebit Terræ densitas in quavis alia parallaxeos hypothesi: minuitur enim semidiameter Terræ in ratione simplici, & massa in triplicata ratione parallaxeos imminutæ.

Scholion.

Tribus prioribus theorematis ea fere omnia complexi sumus, quæ Hugenius, Newtonus, Keillius, aliique de legibus circularis motus tradiderant. In priori autem problemate easdem formulas exhi-

hibuimus, quibus Bernoullius, Duillierius, Moivræus, & Hermannus Tom. I. Par. III. Miscell. Berol. apparentes motus Planetarum e Terra visos definierant: quæ quidem formulæ cum pro hypothesi tantum valeant orbium concentricorum, & circularium, Hallejus in Transact. Philos., Majerus To. II. Acad. Petropol., & Hermannus ipse To. II. Par. II. Miscell. eorumdem problema aliud adorsi sunt, quo in orbitis etiam excentricis, dato Planetæ loco, inquiritur qui locus Terræ esse debeat ut Planeta videatur stationarius. Ex iis, quæ mox tradentur de motu corporum in sectionibus conicis, colligemus suo loco quanam ratione stationis locus in orbitis ellipticis, & proxime ad circulos accedentibus debeat corrigi. Videbimus etiam inferius pro ellipticis iisdem orbitis, non minus accuratum esse calculum quantitatis materiæ Solis, Terræ, Jovis, & Saturni, quem in hypothesi motus circularis in posteriori capitis hujus problemate instituimus. Atque hic quidem post explicatas formulas, quas Clarifs. Interpretes Newtoni le Seur, & Jacquier in notis Propos. VIII. Lib. III. tradiderant, pro massis Jovis, Saturni, & Solis eosdem Newtoni numeros obtinuimus. Newtonus autem posita eadem elongatione maxima Lunæ a centro Terræ e Sole visa, nescio quo calculi arithmetici errore, quantitatem materiæ Terræ præ Solis massa constituit $\frac{1}{169282}$, seu circiter 0.000006.

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU CORPORUM IN SECTIONIBUS CONICIS.

THEOREMA IV.

SI corpus aliquod data velocitate semel projectum urgeatur viribus quibuscumque tendentibus ad puncta quælibet S, V, O &c., fig. 22., posita in eadem recta CB; radiis ad duo quælibet rectæ ipsius puncta C, & B ductis, corpus describet solida proportionalia temporibus: & vicissim si hæc solida sint temporibus proportionalia, vires corporis dirigentur ad puncta S, V, O &c. datæ alicujus rectæ CB.

Dividatur tempus in quotlibet æquales partes, & prima temporis parte describat corpus rectam AQ. Idem secunda temporis parte, si nihil impediret, pergeret ad T describens rectam QT æqua-

qualem ipsi AQ; adeo ut, radiis AB, AC, QB, QC, TB, TC ductis, solida QCBA, QCBT ejusdem basis QCB, ejusdemque altitudinis æqualia essent inter se. Quod si viribus quibuscumque accedentibus, quæ tendant ad puncta quælibet S, V, O &c. ejusdem rectæ CB corpus retrahatur a recto tramite QT, composita actio omnium virium erit in plano QCB, & post finem secundi temporis perveniet corpus ad locum D, & recta TD parallela erit plano QCB, & solida QCBT, QCBD ejusdem altitudinis, & basis QCB erunt æqualia. Simili modo manifestum fiet aliis æqualibus temporis partibus solida æqualia circa eadem puncta describi a corpore. Unde si numerus partium temporis, & rectarum AQ, QD augeatur ultra quoscumque limites, semita AQDH ultimo abibit in lineam curvam, & corpus continuis viribus impulsum circa puncta C, & B describet solida proportionalia temporibus.

Vicissim si hæc solida QCBA, QCBD æqualibus temporibus descripta sint æqualia, recta TD parallela erit plano QCB, adeoque corpus urgebitur viribus tendentibus ad puncta aliqua ejusdem lineæ rectæ CB.

Corollarium I.

Si corpus aliquod ad duo puncta C, B perpetuo urgeatur viribus quibuscumque, & projiciatur quacumque velocitate secundum quamcumque rectam, circa eadem puncta describet solida proportionalia temporibus. Quod si insuper puncta B, C, & rectæ QB, QC congruant, hoc est si corpus unica vi urgeatur ad punctum C, fig. 23., area QCq, quæ dato tempore circa ipsum centrum describetur, data erit, & in eodem semper manebit plano, atque ad aliam quamcumque aream QCD se habebit ut tempus, quo arcus Qq percurritur, ad tempus, quo percurritur arcus QD: nimirum areæ, quas corpora viribus centripetis ad datum punctum tendentibus describent, in planis immobilibus consistent, atque erunt temporibus proportionales, & vicissim.

Corollarium II.

Cum igitur Planeta quisque primarius, & Cometæ etiam singuli circa Solem describant areas proportionales temporibus, duplici vi motus omnium absolvetur, scilicet vi projectili, ac centripeta, & vis projectilis dirigetur juxta tangentem orbitæ cujuslibet descriptæ circa Solem, vis autem centripeta dirigetur ad Solem ipsum: cumque Satellites circa primarios Planetas sese volvendo servent eamdem legem temporum, & arearum, præter communes

munes primariorum vires, aliam Satellites habebunt vim projectilem, aliamque pariter vim centripetam, quæ ad primarios ipsos dirigetur. Satellites denique circa lineam jungentem centra Solis, & primariorum describent solida proportionalia temporibus.

Corollarium III.

Si qM, CP sint perpendicula ex puncto q in vectorem radium CQ, & ex centro C in tangentem QO ducta, ac punctis Q, q coeuntibus vocetur A duplum areæ QCq, erit $A = QC . qM = CP . Qq$, sive erit $Qq = \frac{A}{CP}$, & cum dato tempore data sit area QCq, velocitas, qua percurretur arcus Qq, erit reciproce ut perpendiculum CP. Velocitas autem angularis corporis circa centrum virium C erit reciproce in duplicata ratione vectoris radii QC. Etenim punctis Q, q coeuntibus erit angulus QCq directe ut qM, & reciproce ut QC, &, ob $qM = \frac{A}{QC}$, erit $QCq = \frac{A}{QC^2}$.

Corollarium IV.

Quod si insuper sit qO radio QC parallela, quo tempore describetur area QCq, corpus ob vim projectilem spatio QO excurreret per tangentem, nisi inde spatio qO, aut Qm retraheretur a vi centripeta. Et quia coeuntibus punctis Q, q radii QC, qC, & vires centripetæ in quavis distantiarum ratione agentes in punctis ipsis æquales fiunt; corpus a tangente retrahetur motu uniformiter accelerato, atque idcirco quo tempore describetur area QCq eam velocitatem acquiret corpus, qua duplum spatium Qm æquabiliter eodem tempore posset absolvere. Quia denique vis centripeta, juxta §. IV. Introd., est ut quadratum velocitatis divisum per duplum spatium accelerato motu absolutum; vis centripeta in puncto Q erit ut duplum sagittæ Qm, quæ chordam qo tangenti parallelam bisecat, & convergit ad centrum virium.

Corollarium V.

Et si vis omnis, qua corpus impellitur ad centrum C, in duas resolvatur, quarum una secundum tangentem QP agat, altera sit eidem perpendicularis in puncto Q, ac vis omnis centripeta vocetur G, vis, qua ibidem corpus juxta tangentem sollicitabitur,

 erit

erit $= G . \frac{QP}{CQ} = G . \frac{QM}{Qq}$. Et quia velocitas in elementum suum ducta æquatur vi acceleratrici ductæ in elementum spatii Qq; si projectionis velocitas vocetur V, & sit X radius vector QC, atque elementum radii QM sit $- dX$, prodibit $VdV = - G . dX$, atque inde aliæ virium centripetarum formulæ deduci poterunt.

Corollarium VI.

Si duo corpora duas curvas AQH, aRb, fig. 24., circa idem centrum C describant, & in æqualibus a centro distantiis vires centripetæ agant æqualiter, accipiaturque $CQ = CR$, & radiis CQ, Cq describantur circulares arcus QR, Mm, adeoque sit $Rm = QM = - dX$, atque insuper projectionis velocitates in punctis Q, & R vocentur V, & U, ob gravitatem acceleratricem utrobique æqualem erit $- G . dX = VdV = UdU$, sive erit $dV : dU = U : V$, nimirum in distantiis æqualibus a centro incrementa velocitatum erunt totis velocitatibus reciproce proportionalia.

Corollarium VII.

Si igitur in binis locis quibuslibet Q, & R æque dissitis a centro virium æquales fuerint duorum corporum velocitates, ibidem velocitatis incrementa, aut decrementa erunt æqualia, totæque velocitates in aliis quibuscumque altitudinibus semper æquales erunt: & si corpus, aut filo suspensum oscilletur, aut alia ratione aliqua lineam aliquam curvam describat, & interim corpus aliud recta ascendat, aut descendat ad centrum, & in casu aliquo æqualium altitudinum velocitates duorum corporum æquales sint; in aliis etiam quibuscumque altitudinibus velocitates æquales erunt.

Theorema V.

Si corpus in sectione conica AQH moveatur, fig. 25., & 26., ac vis centripeta tendat ad focum C, velocitas in quolibet puncto Q erit directe in ratione simplici areæ eodem tempore descriptæ, & in ratione subduplicata distantiæ QF a superiore foco F, & reciproce in ratione simplici semiaxis conjugati, & in ratione subduplicata distantiæ a foco C.

Si CP sit perpendicularis tangenti PQK, & producantur rectæ FQ, CP, quousque sibi in p occurrant, juxta elementa conicorum, æquales erunt anguli CQP, FQK, pQP, & ob angulum rectum P æquales erunt rectæ CQ, pQ, & tota Fp

erit

erit $= FQ \pm QC = HA$: eſt enim in ellipſi ſumma, & in hyperbola differentia, duarum FQ, CQ axi majori æqualis. Quare ſi ex P ad centrum ducatur recta PO, ob $CO = FO$, & $CP = Pp$, erit PO parallela ipſi Fp, & æqualis dimidio eidem axi, ac punctum P ſemper erit in peripheria circuli centro O, & radio HO deſcripti. Quo dato ſi productis PC, KF, fig. 27., quouſque adverſæ peripheriæ parti occurrant in c, & f, jungatur cf, ob angulos f, & c rectos, æqualeſque angulos rectæ CF alternos, patet rectam PC ipſi Ff, & Cc ipſi KF æqualem eſſe oportere. Erit igitur $PC . Cc = PC . FK = HC . CA = OD^2$. His autem poſitis ſi duplum areæ QCq, quæ dato elemento temporis deſcribitur, fig. 25., & 26., vocetur A, per Coroll. II. ſuperioris Theorematis, velocitas in puncto Q erit $= \frac{A}{CP} = \frac{A . FK}{OD^2}$: nimirum velocitas corporis proportionalis erit perpendiculo FK: ac denique ob $FK = \frac{QF . CP}{QC}$, erit $\frac{A^2}{CP^2} = \frac{A^2 . FK}{OD^2 . CP} = \frac{A^2 . QF}{OD^2 . QC}$. Patet igitur propoſitum.

Corollarium I.

In vertice H ſectionis conicæ erit quadratum velocitatis $\frac{A^2 . AC}{OD^2 . HC}$: & quia velocitas radio vectori perpendicularis, per Coroll. III. Theor. IV. eſt reciproce ut diſtantia, fiet quadratum perpendicularis velocitatis in loco $Q = \frac{A^2 . AC . HC}{OD^2 . CQ^2} = \frac{A^2}{CQ^2}$, ac propterea $\frac{A^2}{CQ^2}$ exprimet quadratum velocitatis ipſius perpendicularis diviſum per diſtantiam loci propoſiti a foco: quod cum æquetur duplæ ſagittæ circularis arcus ad eamdem diſtantiam dato tempore deſcripti: dupla vero ſagitta exprimat vim centripetam, qua idem circularis arcus deſcribi poſſet: & cum denique vis centripeta in circulo æqualis ſit vi centrifugæ, qua ſcilicet ſibi relictum corpus juxta tangentem excurrendo a peripheria circuli recederet; erit $\frac{A^2}{CQ^2}$ vis omnis, qua corpus in ellipſi motum nitetur directe a foco ellipſeos recedere.

COROLLARIUM II.

Cum sit $QF = HA \pm QC$, erit etiam $\frac{A^2}{CP^2} = \frac{A^2 . HA}{OD^2 . QC} \mp \frac{A^2}{OD^2}$, aut si latus rectum principale $\frac{4OD^2}{HA}$ sectionis conicae vocetur L, erit quadratum totius velocitatis in puncto quocumque $Q = \frac{4A^2}{L.QC} \mp \frac{4A^2}{L.HA}$, superiore signo ad ellipsim, inferiore ad hyperbolam pertinente: & si foco F longius abeunte evanescat posterior terminus, & ellipsis desinat in parabolam, fiet ultimo quadratum idem velocitatis $= \frac{4A^2}{L.QC}$.

COROLLARIUM III.

Patet autem quod si cuipiam quantitati data lege variabili dematur, addaturve quantitas quaepiam constans, differentia, aut summa duarum quantitatum variabitur in ratione majore, aut minore, quam prior illa quantitas variaretur. Cum igitur in ellipsi, & hyperbola sit quadratum velocitatis $\frac{4A^2}{L.QC} \mp \frac{4A^2}{L.HA}$, & in parabola sit $\frac{4A^2}{L.QC}$; erit velocitas in parabola in ratione reciproca subduplicata distantiae a foco illo, ad quem tendit vis, & in ellipsi magis, in hyperbola vero minus variabitur velocitas, quam pro ratione ipsa subduplicata.

THEOREMA VI.

Si corpus in sectione conica moveatur, & vires centripetae ad focum tendant; erunt vires ipsae centripetae in ratione composita ex duplicata directa areae dato elemento temporis descriptae, ex reciproca simplici semilateris recti principalis, & reciproca duplicata distantiarum ab eodem foco.

Theorema hoc foecundissimum pluribus modis ex antecedentibus aliis theorematis potest colligi. Omnium autem simplicissimus hic est. Si projectionis velocitas vocetur V, & sit radius vector $CQ = X$, per Coroll. II. Theor. V., erit $V^2 = \frac{4A^2}{L}\left(\frac{1}{X} \mp \frac{1}{HA}\right)$,

& ſumptis utrimque elementis erit $V\,dV = \frac{-2\,A^2.\,dX}{L.\,X^2}$. Jam vero ſi vis centripeta vocetur G, manentibus aliis denominationibus, per Coroll. V. Theor. IV., erit $V\,dV = -G.\,dX$. Itaque exæquatis terminis fiet $G = \frac{2\,A^2}{L.\,X^2}$. Quæ vis centripetæ expreſſio cum minime pendeat ex quantitate axis tranſverſi, aut conjugati, in hyperbola, & in ellipſi qualibet habebit locum, atque ubi etiam, aucto ſemper axe tranſverſo, ellipſis in parabolam vertatur: & univerſim in quavis ſectione conica vis centripeta æquabitur duplo quadrato areæ, quæ dato tempore deſcribitur, diviſo per latus rectum principale, & per quadratum diſtantiæ corporis a foco.

COROLLARIUM I.

Si a quantitate hac vis centripetæ ſubducatur valor vis centrifugæ in Coroll. I. Theor. V. antea inventus, fiet vis utriuſque differentia $\frac{A^2}{CQ^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}L} - \frac{1}{CQ}\right)$: nimirum vis centripeta erit potior quouſque CQ major erit quam $\frac{1}{2}L$. Et quia ſemiordinata per focum tranſiens æquatur ſemilateri recto principali; corpus e maxima diſtantia a foco, ſive e ſumma apſide digreſſus accelerabitur ſemper juxta vectorem radium quouſque radius ipſe fiet axi perpendicularis, ibique velocitas deſcenſus fiet maxima, ac deinde motus juxta vectorem radium conceptus retardabitur ſemper uſque ad imam apſidem, atque ibi extinguetur velocitas omnis deſcenſus, & corpus contrariis gradibus a foco recedere incipiet.

COROLLARIUM II.

Si QE ſit ſpatium illud, per quod corpus libere decidendo, ea vi centripeta, quam in Q habet, aucta in ratione duplicata diſtantiæ a foco, velocitatem ſuæ projectionis acquireret, & in diſtantia illa a foco, quæ exprimitur unitate, vis centripeta ut antea ſit $\frac{2A^2}{L}$, juxta §. IX. Introduct. erit $V^2 = \frac{4\,A^2.\,QE}{L.\,QC.\,EC}$: cumque per ſuperius

rius theorema fit etiam $V^2 = \frac{A^2 . QF}{OD^2 . CQ} = \frac{4 A^2 . QF}{L. HA . CQ}$, binis valoribus inter se æquatis fiet $\frac{QE}{EC} = \frac{QF}{HA}$, productaque CQ in L ut fit $QL = QF$, & $CL = HA$, erit $CL : QL = EC : QE$, & $CQ + 2QL : QL = CQ : QE$.

COROLLARIUM III.

In hyperbola cum sit HA minor quam QF, erit etiam EC minor quam QE, & corpus eadem vi centripeta, quam in Q habet, aucta in ratione duplicata distantiæ imminutæ, per dimidiam altitudinem QC cadendo non adhuc velocitatem illam concipiet, qua projicitur in loco Q. In ellipsi cum sit HA major quam QF, erit etiam EC major quam QE, & corpus antequam per dimidium radium vectorem decidat, acquiret suæ projectionis velocitatem. Sed si superiore ellipseos foco F longius abeunte ellipsis in parabolam degeneret, erit $HA = QF$, & $EC = QE$: nimirum corporis in parabola moti ea erit velocitas in puncto Q, quæ per dimidium vectorem radium cadendo absolutæ vis centrifugæ actione acquiri posset.

COROLLARIUM IV.

Si vero QE sit spatium, per quod corpus libere decidendo, ea vi centripeta, quam in Q habet, uniformiter semper agente projectionis velocitatem posset acquirere, juxta §. IV., erit $V^2 = 2G . QE$ $= \frac{4A^2 . QE}{L . CQ^2} = \frac{4A^2 . QF}{L . HA . CQ}$, & producta CQ in L ut sit $QL = QF$, erit $HA : QF = CL : QL = QC : QE$, & $CL : QC = QC : CE$, scilicet in ellipsi punctum E ut antea acceptum cadet intra Q, & C, in parabola coincidet cum foco C, & in hyperbola cadet ultra focum.

COROLLARIUM V.

Est vero $PC^2 = \frac{OD^2 . QC}{QF} = \frac{L . HA . QC}{4 QF}$. Itaque erit $PC^2 : QC^2 = \frac{L . HA}{4 QF} : QC = \frac{1}{4} L : \frac{QF . QC}{HA} = \frac{1}{4} L : QE$, scilicet altitudo illa, per quam corpus sua vi centripeta libere decidendo projectionis velocitatem acquireret, erit quarta proportionalis

ad

ad PC^2, QC^2, & $\frac{1}{4}$ L. Inde autem patet in vertice sectionis conicæ, ob $PC = QC$, velocitatem projectionis eam esse, quæ acquiri posset cadendo per quartam partem lateris recti principalis, & in vertice minoris axis ellipseos D, ob $PC = DO$, & $QC = HO$, atque insuper $DO^2 : HO^2 = L : HA$, eam esse velocitatem, quæ acquiri posset cadendo per quartam partem majoris axis. In parabola vero universim erit $\frac{1}{4} L = \frac{PC^2}{QC}$.

Theorema VII.

Vicissim si vires corporis centripetæ sint inter se reciproce ut quadratum distantiæ a puncto aliquo; corpus data cum velocitate secundum datam rectam projectum sectionem conicam circa illud punctum veluti focum describet.

Nam si detur velocitas projectionis, & quantitas vis centripetæ in puncto Q versus C, dabitur etiam altitudo QE, per quam corpus libere decidendo eadem invariabili vi centripeta velocitatem eamdem sibi compararet. Tum si data sit projectionis directio KQP, & sit CL tertia proportionalis ad CE, & CQ, ducaturque perpendiculum LK, quod tantumdem producatur in F, ut fiat $LK = KF$, focisque C, F, & axe transverso HA, qui summam duarum CQ, QL exæquet si QE minor fuerit quam QC describatur ellipsis HQA, fig. 25., quod si vero QE major fuerit, axe transverso HA, qui exæquet differentiam duarum QL, QC, describatur hyperbola HQ, fig. 26.; transibit utraque sectio conica per punctum Q, & a recta KQP tangetur. Quod si autem fuerit $QE = QC$, centroque C, ac radio CQ ducatur circularis arcus, qui secet tangentem QP in K, fig. 29., atque in recta CK accipiatur CH tertia proportionalis ad QC, & PC, ac foco C, vertice H, latere recto principali 4CH describatur parabola HQ; eadem pariter a recta QP tangetur. Jam vero si corpus aliquod in alterutra ex tribus hisce conicis sectionibus moveretur, haberet vires reciproce proportionales quadratis distantiarum QC, & in puncto Q velocitatis directionem haberet QP, quantitatemque velocitatis, juxta postrema duo corollaria, haberet illam, quæ cadendo per altitudinem QE, eadem vi centripeta, quæ in Q agit, acquiri posset. Itaque etiam corpus propositum, eadem vis centripetæ lege, ac quantitate, eademque quantitate, ac directione vis projectilis eamdem sectionem conicam describet.

Corol-

Corollarium I.

Cum igitur viribus decrefcentibus in duplicata ratione auctarum diftantiarum fectio aliqua conica femper defcribi debeat, data velocitate projectionis agnofcetur facile, quæ fectio conica debeat effe, prout fcilicet altitudo illa, per quam libere decidendo, motu uniformiter accelerato, eademque femper vi centripeta projectionis velocitas acquiri poffet, minor, æqualis, vel major fuerit tota diftantia a centro virium: habebitur enim ellipsis in primo cafu, parabola in cafu altero, atque in tertio citerior ramus hyperbolæ. Et quidem in primo cafu ellipsis in circulum abibit fi altitudo illa diftantiæ totius dimidia fuerit: in cafu autem tertio fimili methodo colligetur ulteriorem etiam ramum hyperbolæ AT defcribi poffe, fig. 26., fi vires non tendant ad focum C, fed inde in adverfas partes recedant.

Corollarium II.

Si fit G centrum gravitatis, fig. 28., & PF, QE fint fpatia, quæ duo corpora P, & Q ad fe accedendo fimul percurrerent, ac PB, QC fpatia, quæ percurrerent parallelis projectionum directionibus, & fit $GP : GQ = PF : QE = PB : QC$, junctaque BGC, & completis parallelogrammis PD, QH corpora fimul perveniant in D, & H; ob æquales angulos GBD, GCH, & latera circa ipfos angulos proportionalia, erunt fimilia triangula GBD, GCH, & puncta D, G, H jacebunt in eadem linea recta, eritque $GD : GP = GH : GQ = DH : PQ$. Quare fi vires acceleratrices cujufque corporis fint reciproce ut quadratum diftantiæ ab altero, erunt itidem ut quadratum diftantiæ a centro gravitatis, & duo corpora ut fupra impulfa circa ipfum centrum veluti focum binas fectiones conicas defcribent.

Corollarium III.

Quia gravitatis centro quiefcente poft finem dati temporis duo corpora reperiuntur in directum femper cum centro ipfo, anguli a duobus corporibus fimul defcripti circa centrum fibi invicem æquales erunt: & quia infuper duo triangula GBP, GDP, itemque duo GCQ, GHQ parallelis lineis intercepta funt inter fe æqualia, unumquodque corpus circa gravitatis centrum defcribet areas temporibus proportionales. At fi fit $GP : GQ = PF : QE = PB : QC$, erunt vires acceleratrices duorum corporum, atque item projectionis velocitates directe ut diftantiæ a centro gravitatis, five reciproce ut maffæ.

massæ. Duo igitur corpora sese trahentia circa centrum gravitatis sectiones conicas, & areas proportionales temporibus describent si vires centripetæ sint massis attrahentibus proportionales, & si insuper juxta directiones contrarias, & parallelas eæ projectionis velocitates impressæ fuerint, quæ eamdem pariter sequantur massarum proportionem.

THEOREMA VIII.

Velocitas corporis in quovis sectionis conicæ puncto Q, fig. 25, est ad velocitatem, qua ad eamdem distantiam QC a foco C eadem vi centripeta circulus describi potest, in subduplicata ratione distantiæ QF a superiore foco F ad semiaxem transversum sectionis conicæ HO.

Per Coroll. IV. Theor. VI. corpore in sectione conica moto viribus centripetis tendentibus ad focum C, & decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum, si sit QE spatium illud per quod libere decidendo eadem vi centripeta, quæ in Q agit, uniformiter semper agente projectionis velocitas acquiri posset, esset etiam $CL : 2QL = \frac{1}{2} QC : QE$. Sed per Theor. II. est $\frac{1}{2}$ QC altitudo illa, per quam corpus libere decidens, eadem vi centripeta, quæ in Q agit, velocitatem illam acquireret, qua circulum radii QC circa centrum virium C uniformiter posset describere. Insuper, juxta §. IV. Introd., spatia quæ eadem vi centripeta libere decidendo describuntur, sunt in ratione duplicata velocitatum acquisitarum. Itaque erit quadratum velocitatis in puncto Q propositæ sectionis conicæ ad quadratum velocitatis, qua circa virium centrum C, atque ad distantiam QC circulus uniformiter describi posset, ut $QE : \frac{1}{2} QC = 2QL : CL = QF : HO$, velocitas scilicet in puncto Q sectionis ejusdem conicæ erit ad velocitatem in circulo descripto ad eamdem distantiam a centro virium in subduplicata ratione distantiæ QF a foco F ad semiaxem transversum HO.

COROLLARIUM I.

Si velocitas in sectione conica ad velocitatem in circulo se habeat ut $V : 1$, erit $1 : \frac{1}{2} V^2 = CL : CL - QC$, atque inde eruetur $1 : 1 - \frac{1}{2} V^2 = CL : QC$. Quare foco F longius abeunte in parabola evadet $CL = CL - QC$, & $1 = \frac{1}{2} V^2$: in ellipsi cum puncta C, Q, L ordine jaceant ad eamdem plagam erit $1 - \frac{1}{2} V^2$ quantitas positiva, eritque V^2 binario minor: in hyperbola vero, punctis Q, L jacentibus in adversas partes cum puncto C, erit V^2 major binario. Velocitas igitur in parabola erit ad velocitatem in cir-

 culo

culo in fubduplicata ratione binarii ad unitatem: in ellipfi minor, & in hyperbola major erit velocitas quam pro hac ratione.

Corollarium II.

Et cum fit ut antea $PC^2 = \frac{L.HO.QC}{2QF}$, erit $QF : HO = \frac{1}{2} L.QC : PC^2$, & velocitas in fectione conica erit ad velocitatem in circulo defcripto eadem vi, & ad eamdem diftantiam a foco, ut media proportionalis inter diftantiam ipfam QC, & femiffem lateris recti principalis fectionis, ad perpendiculum PC demiffum e foco in tangentem: in maxima autem, & minima a foco diftantia, cum fit $QC = PC$, velocitas in fectione conica ad velocitatem in circulo fe habebit in fubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam communem diftantiam.

Corollarium III.

At, fi vires centripetæ fint inverfe ut quadrata diftantiarum, erunt velocitates reciproce in diftantiarum ratione fubduplicata, per Coroll. III. Theor. I., & velocitates corporum radiis QC, & $\frac{1}{2}$ QC circulos defcribentium inter fe erunt ut $1 : \sqrt{2}$. Velocitas igitur in parabola æqualis erit velocitati corporis ad dimidiam diftantiam circulum defcribentis, in ellipfi minor, & major in hyperbola. Pariter velocitas in fectione conica erit ad velocitatem in circulo, cujus radius fit $\frac{1}{2}$ L, in ratione compofita ex fubduplicata $\frac{1}{2} L.QC : PC^2$, & fubduplicata $\frac{1}{2} L : QC$, five ut dimidium lateris recti principalis ad perpendiculum demiffum e foco in tangentem.

Corollarium IV.

Tempus, quo exiguus arcus H*n*, fig. 29., in parabola defcribi poterit, erit ad tempus, quo in circulo radii HC defcribi poterit angulus HC*n* ut $1 : \sqrt{2}$. Quare cum tempus integræ revolutionis in circulo fit ad tempus, quo exiguus angulus HC*n* defcribitur ut peripheria *p* ad ipfum angulum, & tempus, quo angulus HC*n* in parabola defcribi poteft, fit ad tempus, quo $90°$ anomaliæ anguli poffunt defcribi, ut fector HC*n* ad aream parabolicam comprehenfam abfciffa CH, & femiordinata ad axem perpendiculari in foco C: cumque pofita $HC = 1$, parametro $= 4$, & femiordinata $= 2$, fit area hujufmodi $= \frac{4}{3}$; compofitis rationibus erit tempus integræ revolutionis in circulo radii HC ad tempus, quo Cometa

meta aliquis angulum rectum circa Solem, a perihelio incipiendo, posset describere ut $1 : \frac{4\sqrt{2}}{3p}$.

Corollarium V.

Si sit CH radius mediocris terrestris orbitæ, & tempus revolutionis Terræ circa Solem vocetur T, radius vero ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, erit $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ tempus, quo Cometa aliquis in orbita parabolica, quæ distantiam periheliam haberet radio mediocri terrestris orbitæ æqualem, angulo recto a perihelii loco recederet, & posito anno sydereo $365^d\ 6^h\ 9^l\ 8^{ll}$, tempus quo in eadem parabola angulus rectus circa Solem a perihelio incipiendo describeretur, esset $109^d\ 14^h\ 46^l\ 20^{ll}$: & tempus hujusmodi augendo, aut minuendo in ratione areæ descriptæ exhiberi poterit tabula omnium temporum, quæ cuicumque alio anomaliæ angulo respondebunt.

Theorema IX.

Si duo corpora Q, & R, fig. 24., circa idem virium centrum C describant sectiones conicas QH, Rh, velocitates in distantiis CQ, CR erunt directe in ratione subduplicata laterum rectorum principalium, & reciproce in ratione simplici perpendicularium CP, Cp ex foco in tangentes demissarum: areæ vero QCq, RCr eodem tempore descriptæ erunt in ratione dumtaxat subduplicata eorumdem laterum.

Etenim per Coroll. II. theorematis antecedentis velocitas in puncto Q sectionis conicæ QH est ad velocitatem corporis radio QC circa C circulum describentis in ratione subduplicata $\frac{1}{2}$ L. QC : PC². Velocitas autem in circulo radii QC est ad velocitatem in circulo radii RC in ratione subduplicata RC:QC. Atque insuper si latus rectum principale sectionis conicæ Rh vocetur l, velocitas corporis in circulo radii RC erit ad velocitatem in puncto R sectionis conicæ Rh in ratione pariter subduplicata pC² : $\frac{1}{2}$ l. RC. Quare compositis rationibus velocitates in punctis Q, & R sectionum conicarum inter se erunt in ratione subduplicata L. pC² : l. PC², sive in ratione subduplicata L : l, & ratione simplici pC : PC. Sunt autem velocitates ut spatia Qq, Rr percursa eodem tempore: &

areæ QCq, RCr ſunt ut $Qq . PC : Rr . pC$. Itaque areæ eodem tempore in duabus ſectionibus conicis deſcriptæ circa idem centrum inter ſe erunt in ratione dumtaxat ſubduplicata laterum rectorum principalium L, l.

Corollarium I.

Latera recta principalia ſectionum erunt in ratione duplicata perpendiculorum ſimul, ac celeritatum: & ſi latera recta ſint æqualia, velocitates in diverſis ſectionibus conicis, perinde ac in ſectione eadem, erunt reciproce ut perpendicula. In maximis, aut minimis a foco diſtantiis, cum perpendicula ſint ipſæ diſtantiæ maximæ, aut minimæ, erunt velocitates corporum diverſas ſectiones conicas deſcribentium in ratione compoſita ex ſimplici diſtantiarum inverſe, & ſubduplicata laterum principalium directe.

Corollarium II.

Cum ſit $PC^2 = \frac{L . HO . QC}{2\,QF}$, & $QF = 2HO \mp QC$, erit $\frac{L}{2\,PC^2} = \frac{QF}{HO . QC} = \frac{1}{\frac{1}{2}QC} \mp \frac{1}{HO}$. Quo patet in diverſis etiam conicis ſectionibus habere locum theoremata, quæ in Coroll. III. Theor. V. attigimus: nimirum in diverſis etiam parabolis circa eumdem focum deſcriptis erit velocitas in ratione ſubduplicata diſtantiæ a centro virium reciproce, & in diverſis ellipſibus magis, minus vero in diverſis hyperbolis variabitur velocitas, quam pro ratione eadem ſubduplicata reciproca diſtantiæ.

Corollarium III.

Areæ vero in diverſis conicis ſectionibus deſcriptæ temporibus quibuſcumque univerſim erunt in ratione ſimplici temporum, & ſubduplicata laterum principalium conjunctim. Quod ſi ſectiones conicæ ſint ellipſes, erit tota area ellipſeos in ſubduplicata ratione lateris recti principalis, & ratione ſimplici periodici temporis conjunctim. Sed eſt tota eadem area proportionalis rectangulo axis majoris, & minoris: & latus rectum principale æquatur quadrato minoris axis per majorem diviſo. Rectangulum igitur majoris, & minoris axis ellipſeos erit directe in ratione compoſita minoris axis, & temporis periodici, & reciproce in ratione ſubduplicata majoris axis.

Co-

Corollarium IV.

In ellipsibus circa eumdem focum descriptis tempora periodica erunt in ratione composita ex simplici, & subduplicata majorum axium, sive in ratione majorum axium sesquiplicata. Majores autem ellipsium semiaxes sunt ipsæ distantiæ mediocres a foco. Itaque tempora periodica in ellipsibus circa eumdem focum descriptis erunt in ratione sesquiplicata mediocrium distantiarum : & æqualia erunt tempora in ellipsibus, quarum semiaxes majores æquentur inter se, adeoque etiam in circulis, quorum radii æquentur semiaxibus majoribus ellipsium : & quæ assumptis mediocribus distantiis in Probl. II. prodierunt massarum proportiones, in circularibus æque, ac ellipticis orbitis valebunt.

Corollarium V.

Si sectiones conicæ sint parabolæ, & in ipsis accipiantur anguli inter se æquales, quia parabolæ omnes sunt similes inter se, erunt etiam similes areæ, quæ æquales angulos ad focum similiter subtendent, eruntque eædem areæ in duplicata ratione laterum homologorum, sive etiam laterum principalium. Cum igitur universim tempora sint ut areæ directe, & reciproce ut radices laterum principalium; tempora, quibus æquales parabolarum anguli describentur, erunt in ratione sesquiplicata laterum principalium, & quadrata temporum erunt ut cubi laterum.

Scholion.

In priori capitis hujus theoremate magis extendimus pulcherrima inventa Newtoni, & Machinii, quæ in Coroll. I. veluti peculiares propositionis casus attigimus, & quorum ope vim centripetam primariorum ad Solem, & Satellitum ad primarios dirigi cum Newtono ipso demonstravimus. In corollario etiam sexto propositionem quadragesimam Lib. I. Princip. Mathemat. breviter exposuimus. In subsequentibus autem theorematis quæ apud authores alios, & Newtonum potissimum occurrunt theoremata de motu corporum in sectionibus conicis ea ratione tradidimus, quæ in primis facilis, & expedita visa est. In corollariis II. & III. Theor. VI. singularem attigimus proprietatem corporum in sectionibus ipsis motorum, quam eleganti sinthesi fuse exposuerat Stewartus in Prop. VI., VII., & VIII. Tractatus tertii Physico-Mathematici : deinde in Coroll. IV. adjecimus proprietatem aliam analogam a Cl. Boscovichio traditam

in

in corollariis Propoſ. I. de inæqualitatibus Jovis, ac Saturni : atque in Coroll. V. adjecimus elegans aliud theorema a Cl. Franciſco Zanotto traditum ad calcem Cap. III. de viribus centralibus. Ex iis autem corollariis in Theor. VII. eruimus ſolutionem inverſi, ut vocant, problematis virium centripetarum. Newtonus cum in Prop. XI., XII., & XIII. Lib. I. oſtendiſſet vires centripetas corporum in ſectionibus conicis motorum circa focos eſſe reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, inde viciſſim collegit, quod ſi vires ſint reciproce ut quadratum diſtantiæ a puncto aliquo, corpus circa ipſum punctum veluti focum ſectionem conicam deſcribet: quia ſcilicet dato umbilico, puncto contactus, & poſitione tangentis deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvitatem datam habeat ad punctum illud: datur autem curvitas ex data vi centripeta, & velocitate corporis, & orbes duo ſe mutuo tangentes eadem vi centripeta, eademque velocitate deſcribi nequeunt. Quæ licet Johannes Bernoullius peculiari demonſtratione indigere exiſtimaverit in actis Pariſ. Acad. anni 1710., ex ſe tamen manifeſta ſunt : data enim poſitione tangentis, velocitate, ac vi centripeta, data jam, ac determinata eſt omnis a tangente ipſa deflexio, ut in eodem Theor. VII. indicavimus. In poſtremo autem theorematis ejuſdem corollario attigimus peculiarem conditionem, quæ debet adjici prioribus propoſitionibus ſectionis undecimæ Princip. Newtoni. Corpora ſcilicet ſe ſe attrahentia, & circa gravitatis centrum projecta, ellipſes circa ipſum centrum debent deſcribere, ſi projectionis directiones parallelæ ſint, ac contrariæ, & velocitates inſuper ſint maſſis attrahentibus proportionales. Unde ex mutua Terræ, ac Lunæ attractione minime ſequitur Terram etiam ſimul cum Luna circa commune gravitatis centrum revolvi, niſi Terra ſimul cum Luna in adverſas partes directionibus parallelis initio projecta fuerit, ea cum velocitate, quæ ad velocitatem Lunæ ſe habuerit ut maſſa Lunæ ad maſſam Terræ. His adnotatis in Theor. VIII. demonſtravimus legem traditam jam a Moivræo velocitatis corporum in ſectione conica, & circulo paribus a centro diſtantiis motorum : ex qua poſtmodum lege alia deduximus Newtoni corollaria, nimirum III., IV., VII., VIII., & IX. Propoſ. XVI. Lib. I. Corollarii etiam loco attigimus Hallæi theoremata, quæ parabolicum Cometarum motum reſpiciunt. Ac denique in Theor. IX. ſimul congeſſimus propoſitiones XIV., XV., & XVI. Newtoni de velocitate corporum in diverſis ſectionibus conicis motorum, & de proportione temporum, & arearum.

CA-

CAPUT TERTIUM.

DE LEGIBUS, ET ÆQUATIONIBUS MOTUS ELLIPTICI.

PROBLEMA III.

SI corpus aliquod in ellipsi AQH moveatur, fig. 30., & detur angularis ipsius distantia a summa apside ellipseos A, sive angulus anomaliæ veræ ACQ, invenire absolutam distantiam CQ a foco C.

Si ex puncto Q in majorem axem AH demittatur perpendiculum QZ, ob notam ellipseos proprietatem erit $OA^2 : OD^2 = OA^2 : OA^2 - OF^2 = OA^2 - OZ^2 : QZ^2 = OA^2 - \overline{CZ \mp OC}^2 : QZ^2$, & valebit superius signum cum punctum Z reperietur inter C, & A, inferius vero cum idem erit inter C, & H. Quod si valori quantitatis QZ^2 ex hujusmodi analogia erutæ addatur CZ^2, atque ex summa duorum quadratorum extrahatur radix, facili calculo eruetur $CQ = OA \pm \frac{OC . CZ}{OA} - \frac{OC^2}{OA}$. Quare cum sit $\pm CZ = CQ.$ cos. QCA, erit etiam $CQ - \frac{OC . CQ . \text{cos. } QCA}{OA} = \frac{OA^2 - OC^2}{OA} = \frac{OD^2}{OA}$, atque ita fiet $CQ = \frac{OD^2}{OA - OC . \text{cos. } QCA}$: aut, cum a vertice H incipiendo cosinus anguli QCA, sive etiam anguli QCH negativo signo exprimi debeat, erit $CQ = \frac{OD^2}{OH + OC . \text{cos. } QCH}$.

COROLLARIUM I.

Quod si igitur ellipseos parameter exprimatur unitate, & sit $4OD^2 = 2OH$, erit $CQ = \frac{\frac{1}{2} OH}{OH + \overline{OH - CH} . \text{cos. } QCH}$: & si foco F longius abeunte ellipsis in parabolam convertatur, & CH præ OH possit negligi, fiet $CQ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} . \text{cos. } QCH} = \frac{CH}{\text{cos. } \frac{1}{2}QCH^2}$:

adeoque in orbitis parabolicis erunt vectores radii in ratione simplici parametrorum, atque in ratione inversa duplicata cosinus dimidii anguli anomaliæ QCH.

Corollarium II.

Erit etiam in orbitis parabolicis HFQ, fig. 29., radius quicumque vector $CQ = \frac{2CH}{1 + \text{cos.}\,QCH} = \frac{2CH}{1 \mp \frac{CZ}{CQ}}$. Inde vero eruetur $\text{cos.}\,QCH = \frac{2CH}{CQ} - 1$, & $CQ = 2CH \pm CZ = CH + HZ$: nimirum radius vector æquabitur summæ distantiæ periheliæ, atque abscissæ: & si sit CF semiordinata transiens per focum C, erit etiam $CQ = CF \pm CZ$.

Corollarium III.

Quod si orbita maneat ellipsis, & si axis major OA, fig. 30., accipiatur loco unitatis, & excentricitas OC vocetur φ, atque a vertice A incipiendo angulus anomaliæ veræ QCH vocetur cz, erit

$$CQ = \frac{1 - \;^{2}}{1 - \varphi.\,\text{cos.}\,cz} = (1 - \varphi^2)(1 + \varphi.\text{cos.}\,cz + \varphi^2.\,\text{cos.}\,cz^2 + \varphi^3.\text{cos.}\,cz^3\ \&c):$$

quo dato si juxta Lem. VI. pro variis potestatibus cosinus angularis distantiæ a summa apside substituantur cosinus angulorum multiplorum fiet

$$CQ = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + (\varphi - \tfrac{1}{4}\varphi^3).\,\text{cos.}\,cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{cos.}\,2cz + \tfrac{1}{4}\varphi^3.\,\text{cos.}\,3cz\ \&c.$$

Problema IV.

Iisdem positis stationum apparentium loca in orbitis ellipticis proxime ad circulos accedentibus corrigere.

Sint R, & r radii mediocres, sive majores semiaxes orbitarum Terræ, & Planetæ alterius, & sint excentricitates φ, & ω, & anguli anomaliæ veræ m, & n: adeoque sint semilatera recta principalia duarum orbitarum $\frac{R^2 - \varphi^2}{R}$, & $\frac{r^2 - \omega^2}{r}$, & radii vectores ad tempus datum $\frac{R^2 - \varphi^2}{R - \varphi.\,\text{cos.}\,m} = A$, & $\frac{r^2 - \omega^2}{r - \omega.\,\text{cos.}\,n} = B$. Quia per Theor. IX. velocitates corporum in orbitis ellipticis sunt in ratione sub-

ſubduplicata laterum principalium directe, & reciproce in ratione ſimplici perpendiculorum ex foco in tangentes demiſſorum, ſi ellipſes tam proxime accedant ad circulos ut poſſint negligi quadrata excentricitatum, negligi etiam poterunt variationes exiguæ, quæ ex tangentium inclinatione ortum ducent, eruntque velocitates directe ut radices ſemilaterum, & reciproce ut vectores radii quam proxime, ſive ut $\frac{R^{\frac{1}{2}}}{A} : \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a}$. Hoc dato pro apparentium ſtationum loco in Coroll. III. Probl. I. ſtatuendum erit

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{B} . \surd (B^2 - A^2 . \text{ſin.} X^2) = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{A} . \text{coſ.} X,$$

ac ſimiliter reſoluta æquatione, ſubſtitutiſque valoribus radiorum A, & B fiet

$$\text{ſin.} X = \pm B . \surd \left(\frac{r A^2 - R B^2}{r A^4 - R B^4} \right)$$

$$= \pm \left(r + \frac{\omega}{r} . \text{coſ.} n\right) \surd \left(\frac{R - r + 2\varphi . \text{coſ.} m - 2\omega . \text{coſ.} n}{R^3 - r^3 + 4R^2 \varphi . \text{coſ.} m - 4 r^2 \omega . \text{coſ.} n} \right).$$

Corollarium I.

Quia Veneris excentricitas præ excentricitate terreſtris orbitæ exigua eſt, locus ſtationis Veneris ſatis accurate exhiberi poterit formula

$$\text{ſin.} X = \pm r . \surd \left(\frac{R - r + 2\varphi . \text{coſ.} m}{R^3 - r^3 + 4R^2 \varphi . \text{coſ.} m} \right):$$

& quia excentricitas Terræ eſt multo minor excentricitate orbitarum Mercurii, & Jovis, pro inveniendo ſtationum loco in hiſce orbitis formula alia poterit ſufficere

$$\text{ſin.} X = \pm \left(r + \frac{\omega}{r} . \text{coſ.} n\right) . \surd \left(\frac{R - r - 2\omega . \text{coſ.} n}{R^3 - r^3 - 4r^2 \omega . \text{coſ.} n} \right).$$

Corollarium II.

Generatim vero ſi in priori orbitarum circularium hypotheſi quæratur primum ad quam a Sole diſtantiam Planeta aliquis ſtationarius videri poſſit, ac deinde pro invento ſtationis loco aſſumptis angulis anomaliæ veræ Planetæ, & Terræ, ope formulæ hujus problematis quæratur correctio illa, quæ pendet ex ellipticitate orbi-

tarum,

tarum, atque ita pariter corrigantur assumpti anomaliæ veræ anguli, ad verum quæsitæ distantiæ valorem accedere quisque poterit quantum voluerit. Sed jam ab opticis hisce, & apparentibus Planetarum inæqualitatibus ad inæqualitates alias, quæ vere ex ellipticitate orbitarum profluunt, redeamus.

PROBLEMA V.

Iisdem positis, & dato angulo anomaliæ veræ angulum anomaliæ mediæ invenire.

Si maneant omnia ut in Probl. III., & in fig. 30., quia radius circuli, cujus area æquatur toti areæ ellipseos, est medius proportionalis inter binos ellipseos semiaxes 1, & OD, assumendo $CT = \sqrt{OD} = \sqrt[4]{1-\varphi^2}$, & radio hujusmodi describendo circularem arcum TR; juxta ea, quæ initio hujus libri adnotavimus, erit anomalia media proportionalis tempori, sive etiam areæ ACQ, quæ per Theor. IV. augeri debet in eadem ratione temporis, & anomalia vera proportionalis erit angulo ACQ: atque ob ellipseos, & circuli ita descripti æqualitatem anomalia vera ad anomaliam mediam se habebit ut sector circularis TCR ad aream ellipticam ACQ. Anomaliæ autem utriusque, & veræ, & mediæ incrementa inter se erunt ut sectores quam minimi RCr, QCq, sive etiam ut $CR^2 : CQ^2$. Quod si igitur angulus TCR ut antea sit cz, & angulus anomaliæ mediæ vocetur cZ, erit $c\,dZ = \frac{CQ^2 . c . dz}{\sqrt{(1-\varphi^2)}}$, & quadrati CQ^2 valorem ex posteriori corollario assumendo fiet

$$dZ = \frac{CQ^2 . dz}{\sqrt{(1-\varphi^2)}} = \frac{(1-\varphi^2)^{\frac{3}{2}} . dz}{(1-\varphi . \text{cos}. cz)^2}$$

$$= (1-\varphi^2)^{\frac{3}{2}} . dz . (1 + 2\varphi . \text{cos}. cz + 3\varphi^2 . \text{cos}. cz^2 + 4\varphi^3 . \text{cos}. cz^3 \text{ \&c.})$$

$$= dz . (1 + 2\varphi . \text{cos}. cz + \tfrac{3}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + \varphi^3 . \text{cos}. 3cz \text{ \&c.}):$$

ac denique juxta Lem. VII. summis acceptis fiet

$$Z = z + \frac{2\varphi}{c} . \text{sin}. cz + \frac{3\varphi^2}{4c} . \text{sin}. 2cz + \frac{\varphi^3}{3c} . \text{sin}. 3cz \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM I.

Si negligatur quadratum excentricitatis, & motus progressivus apsi-

apsidum, differentia anomaliæ veræ, & mediæ erit 2φ. sin. $z =$ CF. sin. ACQ: & si ex F in CQ ducatur perpendiculum Fo, cum sit $\frac{Fo}{CF} = \frac{QZ}{CQ} =$ sin. ACQ, erit differentia eadem $= Fo$: & quia anguli exigui proxime proportionales sunt sinubus, atque in ellipsi accedente proxime ad circulum censeri potest $QF = QC = 1$; differentia veræ, & mediæ anomaliæ erit quam proxime æqualis angulo CQF.

Corollarium II.

Quare cum angulus AFQ sit summa duorum internorum ACQ, FQC, in ellipsibus proxime ad circulos accedentibus, ob $Z = z + 2\varphi$. sin. z, angulus ipse AFQ proportionalis erit anomaliæ mediæ, seu tempori, quo arcus AQ describitur: hoc est in ellipsi proxime circulari ita feretur corpus, ut circa priorem focum C areas, & circa alterum focum F angulos describat proportionales temporibus: maxima vero duorum angulorum ACQ, FQC differentia æquabitur duplæ excentricitati per mediócrem distantiam divisæ.

Corollarium III.

Universim vero si motus apsidum nequeat negligi, & motus angularis absolutus ad angularem motum supputatum a summa apside se habeat ut $1 : c$, sive si absolutus motus sit z, anomalia vera cz, motus medius Z, anomalia media cZ, quod locum haberet in ellipsi circa focum uniformiter mobili, in qua motus absolutus esset ad angularem progressum apsidum ut $1 : 1 - c$; erit differentia medii, & veri motus $\frac{2\varphi}{c}$. sin. $cz + \frac{3\varphi^2}{4c}$. sin. $2cz + \frac{\varphi^3}{3c}$. sin. $3cz$ &c.

Problema VI.

Data anomalia media invenire veram.

Juxta præcedentes formulas neglectis excentricitatis potestatibus plusquam cubicis, & transpositis terminis erit

$$cz = cZ - 2\varphi . \text{sin.}\, cz - \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \text{sin.}\, 2cz - \tfrac{1}{3}\varphi^3 . \text{sin.}\, 3cz :$$

& si in expressione sinuum cz, $2cz$, $3cz$ successive substituatur valor, qui ex hujusmodi serie colligitur, negliganturque inferiorum ordinum termini fiet

$$c\zeta = cZ - 2\varphi . \sin. \left(cZ - 2\varphi . \sin. c\zeta - \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. 2c\zeta\right)$$
$$- \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. \left(2cZ - 4\varphi . \sin. c\zeta\right) - \tfrac{1}{3}\varphi^3 . \sin. 3cZ$$
$$= cZ - 2\varphi . \sin. \left(cZ - 2\varphi . \sin. \overline{cZ - 2\varphi . \sin. cZ} - \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ\right)$$
$$- \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. \left(2cZ - 4\varphi . \sin. cZ\right) - \tfrac{1}{3}\varphi^3 . \sin. 3cZ .$$

Jam vero cum exigua sit quantitas $\varphi . \sin. cZ$, juxta Lem. II. erit

$$-2\varphi . \sin. (cZ - 2\varphi . \sin. cZ) = -2\varphi . \sin. cZ + 4\varphi^2 . \sin. cZ . \cos. cZ,$$

ac per Lem. V. erit $\sin. cZ . \cos. cZ = \tfrac{1}{2} \sin. 2cZ$.

Quare productis aliis sinuum, ac cosinuum resolutis fiet

$$-2\varphi . \sin. \left(cZ - 2\varphi . \sin. \overline{cZ - 2\varphi . \sin. cZ} - \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ\right)$$
$$= -2\varphi . \sin. \left(cZ - 2\varphi . \sin. cZ + \tfrac{5}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ\right)$$
$$= -2\varphi . \sin. cZ + 4\varphi^2 . \sin. cZ . \cos. cZ + 4\varphi^3 . \sin. cZ^3 - \tfrac{5}{2}\varphi^3 . \sin. 2cZ . \cos. cZ$$
$$= -2\varphi . \sin. cZ + 2\varphi^2 . \sin. 2cZ + \tfrac{7}{4}\varphi^3 . \sin. cZ - \tfrac{5}{4}\varphi^3 . \sin. 3cZ .$$

Erit pariter $-\tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. (2cZ - 4\varphi . \sin. cZ)$

$$= -\tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ + 3\varphi^3 . \sin. cZ . \cos. 2cZ$$
$$= -\tfrac{3}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ - \tfrac{3}{2}\varphi^3 . \sin. cZ + \tfrac{1}{2}\varphi^3 . \sin. 3cZ .$$

Atque ita terminis omnibus simul collectis erit

$$c\zeta = cZ - 2\varphi . \sin. cZ \quad + \tfrac{5}{4}\varphi^2 . \sin. 2cZ - \tfrac{13}{12}\varphi^3 . \sin. 3cZ .$$
$$+ \tfrac{1}{4}\varphi^3 . \sin. cZ$$

Corollarium I.

Si hujusmodi expressio anomaliæ veræ $c\zeta$ substituatur in expressione vectori, radii CQ, quæ ex formula Probl. III. in Coroll. III. fuit eruta, & juxta alias formulas lemmatum præcedentium resolutione terminorum facta sit

$$\cos. c\zeta = \cos. \overline{cZ - 2\varphi . \sin. cZ} = \cos. cZ + 2\varphi . \sin. cZ^2$$
$$= \varphi + \cos. cZ - \varphi . \cos. cZ ,$$

neglectis plusquam quadraticis excentricitatis potestatibus erit

$$CQ = 1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \cos. cZ - \tfrac{1}{2}\varphi^2 . \cos. 2cZ \ \&c.$$

Corol-

COROLLARIUM II.

Neglectis vero dumtaxat potestatibus plusquam cubicis erit medii, ac veri motus differentia

$$z - Z = -\left(\frac{2\varphi}{c} - \frac{\varphi^3}{4c}\right).\ \text{sin.}\ cZ + \frac{5\varphi^2}{4c}.\ \text{sin.}\ 2cZ - \frac{13\varphi^3}{12c}.\ \text{sin.}\ 3cZ:$$

priores scilicet æquationes motus elliptici tres erunt, quarum prior ad 90° distantiam a linea apsidum fiet maxima, altera ad distantiam 45°, tertia vero ad 30°, cum sin. 3cZ fiet æqualis radio: & prior quidem, ac tertia ut motus verus habeatur, a motu medio subducenda erit dum addetur secunda, & contraria ratione singulæ erunt addendæ, vel subducendæ cum sinus angularis distantiæ a summa apside semel, bis, ac ter sumptæ contrario signo afficietur.

COROLLARIUM III.

Cum assumpta ratione peripheriæ ad radium 314159 : 50000 radius prodeat æqualis arcui 57.29578°, sive 57° 17' 44.8'', valorem hujusmodi loco radii, quem hucusque unitate expressimus, accipiendo, nimirum coefficientes omnes ducendo in 57° 17' 44.8'', & pro lunari orbita fractionem $\frac{\varphi}{c}$ assumendo partium 0.055 distantiæ mediocris Lunæ a Terra, seclusis viribus perturbatricibus, pro vero Lunæ motu in orbita elliptica, & pro prioribus motus medii æquationibus habebimus

$$z = Z - 6°\ 17'\ 48''.\ \text{sin.}\ cZ + 13'.\ \text{sin.}\ 2cZ - 37''.\ \text{sin.}\ 3cZ.$$

COROLLARIUM IV.

In aliis Planetis omnibus ob lentissimum motum apsidum statui poterit $c = 1$, & si in maxime excentrica Mercurii orbita excentricitas φ cum Cassino assumatur partium 0.20878 radii mediocris, erit

$$z = Z - 23°\ 48'.\ \text{sin.}\ Z + 3°\ 7'.\ \text{sin.}\ 2Z - 33\tfrac{2}{3}'.\ \text{sin.}\ 3Z:$$

in orbita autem Veneris, ob parvitatem excentricitatis 0.00714, satis erit priorem seriei terminum supputare, ac fiet veri, mediique motus differentia $-$ 49' 5''. sin. Z. Pro terrestri orbita cum Majero assumendo $\varphi = 0.016835$, fiet

$$z = Z - 1°\ 55'\ 30''.\ \text{sin.}\ Z + 21''.\ \text{sin.}\ 2Z.$$

Co-

COROLLARIUM V.

Simili modo si excentricitates orbitarum superiorum Martis, Jovis, & Saturni ordine assumantur partium 0.09287, 0.0483, 0.05693 mediocrium distantiarum, ut ferunt Cassini tabulæ, & ubique designet z motum verum, Z autem medium, in tribus iisdem orbitis ordine pariter habebimus

$$z = Z - 10^\circ\, 38'.\ \text{sin.}\, Z + 37'.\ \text{sin.}\, 2Z - 3''.\ \text{sin.}\, 3Z$$

$$z = Z - 5^\circ\, 32'.\ \text{sin.}\, Z + 10'.\ \text{sin.}\, 2Z - 25''.\ \text{sin.}\, 3Z$$

$$z = Z - 6^\circ 30'.\ \text{sin.}\, Z + 14'.\ \text{sin.}\, 2Z - 41''.\ \text{sin.}\, 3Z$$

SCHOLION.

Elegans theorema, quod in Coroll. II. Probl. III. indicavimus, Sethi Wardi est, & ad supputandam æquationem centri in orbitis Veneris, ac etiam Terræ, ob parvitatem excentricitatis, posset sufficere. Generalem Kepleriani problematis solutionem pro orbitis utcumque excentricis invenerunt Bouillaud, la Hire, Cassinus, Hermannus, Gregorius, Keillius, Simpsonius, atque aliam nuper exhibuit Clarifs. Lorgna in opusculis Mathematicis. Sed duæ in primis solutiones memorari debent, quarum una a Newtono tradita in scholio Propos. XXX. Lib. I. elegantia, & simplicitate Geometrica maxime se se commendat: altera To. VII. Academ. Petropol. ab Eulero tradita est infinita serie, quam Clairaut in Lem. V. Theoriæ Lunaris ad commodiorem formam reduxit, & quam etiam D. Bossut eleganter demonstravit in dissertatione de ætheris resistentia. Modo hujusmodi seriem peculiari methodo erutam ad eos usque terminos perduximus, qui æquationi centri ex data excentricitate eruendæ in Planetis singulis, ac deinde aliis Lunæ inæqualitatibus reducendis, corrigendisque sufficiunt, ut in libro quarto videbimus. At in Mercurii orbita excentricitas, & centri æquatio non adhuc certo innotescit, ut in Actis Paris. Acad. anni 1753. adnotavit D. de Thury, qui tamen æquationem ipsam ad 23° 50' propius censuit accedere. Cassinus in elementis Astronomiæ æquationem centri Mercurii statuit 24° 2' 58'', Veneris vero 49' 4'', aut 49' 8''. Maximam centri Solis æquationem Majerus statuit 1° 55' 31.6''. In Luna hujusmodi calculus est difficilior, quod ex viribus Solis perturbatricibus quædam aliæ æquationes profluant ejusdem formæ, quæque propterea æquationibus motus elliptici adjungi debent, ut suo loco pariter videbimus. D. la Lande §. 940. Astrono-

nomiæ æquationem centri Martis ſatis proxime eſſe cenſuit $10^\circ\, 41'\, 20''$. Celeberrimus Wargentinus præcipuis obſervationibus oppoſitionum Saturni, & Jovis collatis inter ſe invicem æquationem maximam centri Jovis ad annum 1760. conſtituit $5^\circ\, 34'\, 1''$, eamque ſingulis ſæculis $2'\, 15''$ augeri cenſuit. Æquatio centri Saturni in tabulis Caſſini eſt $6^\circ\, 31'\, 38''$.

CAPUT QUARTUM.

DE MOTU IN ORBITIS PARABOLICIS.

PROBLEMA VII.

DAta diſtantia perihelia, & dato tempore poſt perihelium invenire angulum anomaliæ veræ corporis moti in orbita parabolica.

Sit $1 : a$ ratio mediocris radii terreſtris orbitæ ad diſtantiam periheliam CH in orbita parabolica HQq, fig. 29., & $1 : b$ ſit ratio temporis $109^d\, 14^h\, 46'\, 20''$ ad tempus, quo corpus a loco perihelii H pervenit uſque ad Q, & angulum anomaliæ veræ HCQ deſcribit circa focum C. Manentibus omnibus quæ in Coroll. IV., & V. Theor. VIII., & in Coroll. V. Theor. IX. dicta ſunt, ſi ſit CF perpendicularis axi in foco ipſo, erit

$109^d\, 14^h\, 46'\, 20''.\, a^{\frac{3}{2}} = \frac{4T.\sqrt{2}.a^{\frac{3}{2}}}{3p}$ tempus, quo corpus tranſeundo ex H in F angulum rectum deſcriberet circa focum:

& tempus totius tranſitus ex H in Q erit $= \frac{4T.\sqrt{2}.a^{\frac{3}{2}}}{3p}.\frac{HCQ}{HCF}$, ſive erit $b = a^{\frac{3}{2}}.\frac{HCQ}{HCF}$. Jam vero ſi ſit QK tangens, & TQ normalis parabolæ in puncto Q, & ex foco in tangentem ipſam ducatur perpendiculum CP, ac radius terreſtris orbitæ accipiatur loco unitatis, & diſtantia perihelia CH ſit $= a$, ac ſit propterea parabolæ parameter $= 4a$, & CF $=$ TZ $= 2a$; erit primo area HCF $= \frac{4}{3}a^2$, & HCQ $= \frac{4}{3}b\,a^{\frac{1}{2}}$. Deinde vero erit etiam HCQ $= \frac{2}{3}HZ.QZ - \frac{1}{2}ZC.QZ = \frac{2}{3}QZ.\frac{QZ^2}{4a} - \frac{1}{2}QZ.\frac{\overline{QZ^2 - a}}{4} =$ $\frac{1}{24a}QZ^3 + \frac{1}{2}a.QZ$. Erit inſuper QT : QZ $=$ QK : ZK $=$ CK : KP,

&

& ob æquales rectas CQ, CK, æqualesque angulos KCP, QCP, QTZ, angulus ipse QTZ æqualis erit dimidio angulo anomaliæ veræ HCQ. Quare si tangens dimidii hujus anguli vocetur t, vel si sit $t = \frac{QZ}{TZ} = \frac{QZ}{2a}$, erit area HCQ $= \frac{1}{3} a^2 t^3 + a^2 t$, comparatisque terminis eruetur $t^3 + 3t - \frac{4b}{a^{\frac{3}{2}}} = 0$, & extracta radice, ac posito $\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} = c$, eruetur denique

$$t = \sqrt{(2c + \sqrt{(4c^2+1)})} + \sqrt[3]{(2c - \sqrt{(4c^2+1)})}.$$

Corollarium I.

Dato angulo, qui post perihelium describitur circa focum, dabitur etiam ex æquatione antecedenti semiordinata parabolæ QZ, & inde eruetur valor abscissæ ZH, atque ob CQ $=$ ZH $+$ CH, prodibit radius vector parabolæ, qui dato aliquo tempore habebitur: ac vicissim data distantia perihelia, & distantia alia qualibet a foco, inveniri poterit, & cui anomaliæ veræ angulo, & cui tempori post perihelium distantia eadem respondeat.

Corollarium II.

Cum sit $b = a^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4} t^3 + \frac{3}{4} t\right)$, tempus, quo corpus circa focum describet angulum HCQ, proportionale erit quantitati $t^3 + 3t$: scilicet circa verticem, cum t erit quantitas aliqua exigua, & præ ipsa negligi poterit cubus t^3, tangens dimidii anomaliæ anguli erit quam proxime proportionalis tempori, sive areæ descriptæ circa focum: deinde cum cubus t^3 fiet adeo magnus ut præ ipso quantitas t possit negligi; dimidii ejusdem anguli tangens erit quam proxime in ratione subtriplicata areæ descriptæ, sive etiam temporis.

Corollarium III.

Si, posito $a = 1$, parabola illa proponatur, cujus vertex a foco distet radio mediocri terrestris orbitæ, & in qua juxta Coroll. V. Theor. VIII. rectus angulus circa focum a perihelio incipiendo describitur tempore $109^d\ 14^h\ 46'\ 20''$; quia tangens dimidii anguli recti est radio æqualis, tempore eodem aucto in ra-

ratione $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t : 1$ prodibit tempus, quo circa focum describi poterit angulus, cujus dimidii tangens sit t: in aliis autem parabolis tempora, quibus æquales anguli describentur, juxta Coroll. V. Theor. IX., augenda, aut minuenda erunt in ratione sesquiplicata laterum principalium.

PROBLEMA VIII.

Invenire æquationes, quæ parabolicam Cometæ semitam ex datis quatuor observationibus determinant.

Sit locus Terræ T, & Cometæ Q, fig. 31., atque ex Q in planum Eclipticæ CDT ducatur perpendiculum QP, ac sint TK, QX, PX perpendicula ex T, Q, P ducta in nodorum lineam DCd, jungaturque TP, & sint PL, QZ perpendicula ducta ex P in TK, atque ex Q in axem parabolæ HC, ac denique ex foco C in TP ducatur perpendiculum aliud CO. Si distantia TP loci Cometæ ad Eclipticam reducti vocetur z, ac Terræ orbita sit proxime circularis, accipiaturque radius pro unitate, & sinus CO anguli CTO distantiæ loci P a Sole sit $= m$, & cosinus TO $= \sqrt{(1-m^2)}$, erit $PC^2 = 1 \mp 2\sqrt{(1-m^2)}.z + z^2$: & si sit n sinus anguli QTP distantiæ Cometæ a plano Eclipticæ, erit $PQ^2 = \frac{n^2 z^2}{1-n^2}$, & $CQ^2 = 1 \mp 2\sqrt{(1-m^2)}.z + \frac{z^2}{1-n^2}$.

Quod si insuper sit u sinus inclinationis orbitæ parabolicæ ad eclipticam QXP, erit $QX = \frac{QP}{u} = \frac{nz}{u\sqrt{(1-n^2)}}$: & si v sit sinus, & $\sqrt{(1-v^2)}$ cosinus anguli PTK distantiæ loci P a nodorum linea Dd, erit $PL = XK = vz$, & $KC = \text{sin. } CTK = \text{sin. } \overline{CTO \mp PTK} = m\sqrt{(1-v^2)} \mp \sqrt{(1-m^2)}v$: ac pariter si sit t sinus anguli DCZ, quo linea eadem nodorum Dd inclinatur ad axem orbitæ HZ, erit

$$\frac{CZ}{CQ} = \text{cos. } \overline{QCX \pm XCZ} = \frac{CX}{CQ}.\sqrt{(1-t^2)} \mp \frac{QX}{CQ}.t;$$

atque ob $CX = KC + PL$ substitutis aliis speciebus fiet

$$CZ = (\underset{K}{m.\sqrt{1-v^2} \mp v.\sqrt{1-m^2}} \pm vz)\sqrt{(1-t^2)} \mp \frac{ntz}{u\sqrt{(1-n^2)}}.$$

Denique cum in parabola ſit $CQ = 2CH \pm CZ$; ſi parameter parabolæ vocetur x, fiet radius idem vector

$$CQ = \tfrac{1}{2} x \mp \left(m.\sqrt{1-v^2} \mp v.\sqrt{1-m^2} \pm vz\right) \sqrt{(1-t^2)} - \frac{ntz}{u\sqrt{(1-n^2)}}.$$

Jam vero eſt $TL = z . \text{coſ.}\, PTK$, $PX = \text{ſin.}\, TCD - z . \text{coſ.}\, PTK$, $PQ = z . \text{tang.}\, QTP$, & $PX = z . \dfrac{\text{tang.}\, QTP}{\text{tang.}\, QXP}$. Unde cum ſit $\text{ſin.}\, TCD = \text{ſin.}\, \overline{TCO + OCK} = \text{ſin.}\, \overline{TCO + OTK}$, ex eo duplici rectæ PX valore eruetur

$$z = \frac{\text{ſin.}\, TCD}{\dfrac{\text{tang.}\, QTP}{\text{tang.}\, QXP} + \text{coſ.}\, PTK} = \frac{\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-v^2)} + mv}{\dfrac{n.\sqrt{(1-u^2)} + \sqrt{(1-v^2)}}{u\sqrt{(1-n^2)}}}.$$

Hunc igitur valorem diſtantiæ z ſubſtituendo, & valores binos vectoris radii exæquando inter ſe habebitur æquatio, quæ quatuor tantum incognitas x, t, u, v complectetur: ac propterea valoribus quantitatum m, & n ex obſervationibus quater ſumptis incognitæ omnes, & tota Cometæ ſemita determinari poterit.

Corollarium I.

Si orbita Cometæ ſpectaretur veluti elliptica, quinta inſuper æquationi incognita quantitas advolveretur, nimirum orbitæ excentricitas, & calculo ſimiliter inſtituto ad reſolutionem problematis quinque obſervationibus eſſet opus. Unius etiam obſervationis locum tenere poſſet æquatio eruta ex proportionalitate temporum prioribus obſervationibus interjacentium, & arearum circa focum deſcriptarum. Unde tribus obſervationibus orbita parabolica, quatuor autem elliptica determinari poſſet.

Corollarium II.

Ita vero Geometrica, & directa haberetur problematis reſolutio, nec niſi ſolitis Algebræ artificiis ad abſolvendum calculum eſſet opus. In peculiaribus caſibus plura calculi totius compendia ſe ſe offerent, ut ſi diſtantia loci ad eclipticam reducti præ radio terreſtris orbitæ ſatis magna, vel ſatis parva cenſeri poſſit, aut ſinus latitudinis poſſit negligi &c. Quia tamen calculus univerſim non niſi ſatis prolixus, implicatuſque eſſe poteſt, ex generali ſolutione problematis eruendæ erunt approximationes aliæ, quæ ad Aſtronomiæ praxim, & graphicam determinationem orbitæ parabolicæ ſufficient.

PRO-

PROBLEMA IX.

Datis tribus obſervationibus Cometæ indicare approximationes, quæ facile parabolicam orbitam determinent.

Sint Q, & q, fig. 32., bina Cometæ loca dum Terra reperitur in T, & t, atque inde in planum eclipticæ ducantur perpendicula QP, qp, ac primo diſtantiæ TP, tp eæ aſſumantur, quæ veris cenſeantur propius accedere. Servatis antecedentibus denominationibus erit

$$\text{tang. QXP} = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{QP}{TK-TL} = \frac{\frac{nz}{\sqrt{(1-n^2)}}}{\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-v^2)}+mv-z\sqrt{(1-v^2)}}.$$

Datis inſuper angularibus diſtantiis Cometæ ab ecliptica, & a Sole, ſi ratio quantitatum $\frac{nz}{\sqrt{(1-n^2)}}$ in duabus prioribus obſervationibus ſit $1:k$, & pro ſecunda obſervatione loco m, n, z ſcribamus M, N, Z, exæquatis binis valoribus anguli QXP prodibit

$$\frac{1}{\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-v^2)}+mv-z\sqrt{(1-v^2)}} = \frac{k}{\sqrt{(1-M^2)}\sqrt{(1-v^2)}+Mv-Z.\sqrt{(1-v^2)}}$$

$$\text{tang. PTK} = \frac{v}{\sqrt{(1-v^2)}} = \frac{k\sqrt{(1-m^2)}+Z-\sqrt{(1-M^2)}-kz}{M-km}.$$

Ita igitur eruetur quæ orbitæ inclinatio ad eclipticam, & qui nodorum locus aſſumptis diſtantiis TP, tp reſpondeat: pro tertia vero obſervatione datis pariter quantitatibus n, & m, & valoribus quantitatum v, & u ex priori approximatione ſubſtitutis, diſtantia Terræ a Cometæ loco ad eclipticam reducto eruetur ex æquatione alia

$$z = \frac{\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-v^2)}+mv}{\frac{n\sqrt{(1-u^2)}}{u\sqrt{(1-n^2)}}+\sqrt{(1-v^2)}}.$$

Diſtantiæ etiam Qp, qp Cometæ a plano Eclipticæ ex obſervatis angulis latitudinis, atque ex diſtantiis TP, tp aſſumptis innoteſcent, ac dabitur inſuper diſtantia loci utriuſque Pp, & loci veri diſtantia Qq. Radius autem quicumque vector eruetur ex æquatione alia $QC^2 = 1 \mp 2\sqrt{(1-m^2)}.z + \frac{z^2}{1-n^2}$: cumque ex Q in qC ducto perpendiculo Qx in triangulo QCq ſit $Qq^2 = QC^2 + qC^2 - 2qC.Cx$; datis lateribus Q$q$, QC, qC recta

etiam Cx, ſinuſque, ac coſinus anguli QCq ſupputari poterit. Et quia denique per Coroll. I. Probl. I. ſi parabolæ vertex ſit H, & diſtantia perihelia CH, eſt

$CQ : Cq = 1 + \text{coſ.}\, qCH : 1 + \text{coſ.}\, QCH$, cum ſit inſuper

$\text{coſ.}\, qCH = \text{coſ.}\, \overline{QCH + QCq} = \text{coſ.}\, QCH . \text{coſ.}\, QCq - \text{ſin.}\, QCH . \text{ſin.}\, QCq$, erit

$$\frac{CQ}{Cq} . \overline{1 + \text{coſ.}\, QCH} = 1 + \text{coſ.}\, QCH . \text{coſ.}\, QCq - \text{ſin.}\, QCq . \sqrt{(1 - \text{coſ.}\, QCH^2)}.$$

Quare tranſpoſitis terminis quadrando æquationem

$$1 - \frac{CQ}{Cq} + \text{coſ.}\, \overline{QCq - \frac{CQ}{Cq}} . \text{coſ.}\, QCH = \text{ſin.}\, QCq . \sqrt{(1 - \text{coſ.}\, QCH^2)},$$

& radicem quadratam extrahendo dabitur coſinus anguli QCH.

Qui vero anguli hujus calculus collatis binis obſervationibus prioribus inſtituebatur, pro priori, ac tertia obſervatione ſimili modo debebit repeti: ac niſi idem utrobique anguli valor prodeat, quæ primo aſſumebatur diſtantia loci ad eclipticam reducti, notis falſarum poſitionum regulis, augenda, aut minuenda erit, quouſque valores bini inter ſe conveniant. Deinde ſecunda etiam, & tertia obſervatio comparandæ erunt invicem, eademque ratione varianda erit diſtantia tp, quouſque idem ſemper exſurgat angulus QCH, & poſitio axis HCZ. Tandem quadratum coſinus dimidii anguli QCH ducendo in vectorem radium CQ, per Coroll. I. Probl. III., dabitur diſtantia perihelia CH, & latus rectum principale 4CH: dato autem foco, axe, & latere recto principali parabola omnis deſcribi poterit.

Corollarium I.

Data igitur poſitione trium rectarum, quæ tria Cometæ loca, & Terram jungunt, inveniri poterunt elementa omnia, quæ parabolicam Cometæ ſemitam determinant, ſcilicet inclinatio ad eclipticam, nodorum, atque axis locus, & latus rectum principale. Et quidem approximationum ſeries, quæ ſimplicior, & accuratior videri poteſt, ex ipſa eruitur generali, ac geometrica ſolutione problematis: moleſtia vero calculi arithmetici falſæ poſitionis compendiis imminui poteſt, ut ſi binis diſtantiis loci ad eclipticam reducti ut antea aſſumptis binæ aliæ addantur partes, quarum magnitudines, correctioneſque ex calculi totius proceſſu facilius colligantur. Has vero approximationes Cometæ alicujus exemplo applicare, & cum aliis authorum aliorum methodis conferre ob arithmetici calculi tædium hactenus piguit. Co-

Corollarium II.

Hisce autem, aut similibus methodis Cometarum semitas determinando, easdemque comparando inter se patebit, quæ aut omnino congruent, aut tam parum dissentient, ut in actiones aliorum Planetarum, & in exiguos errores observationum refundi omnis differentia, & Cometa unus, atque idem censeri debeat. Sic patet ex Hallejana tabula differentiam motuum in iis Cometis, qui apparuerunt annis 1456., 1531., 1607, 1682. vix aliquando fuisse duorum graduum, & plerumque fuisse aliquot minutorum: ac propterea non alius fuit Cometa ille quam qui exeunte anno 1758. iterum rediit. Cumque anno 1531. transitus per perihelium fuerit die 24. Augusti, & die 4. Septembris anno 1682., patet Cometæ illius periodum fuisse annorum circiter $75\frac{1}{2}$, nec nisi Jovis, & Saturni attractioni tribui posse quod in postrema revolutione transitus per perihelium ad diem usque 14. Martii anni 1759. protractus fuerit.

Corollarium III.

Quia in ellipsibus etiam prælongis, & ad parabolas propius accedentibus quadrata temporum periodicorum debent esse inter se ut cubi majorum axium, patet majorem axem orbitæ annis $75\frac{1}{2}$ a Cometa illo percursæ ad majorem axem terrestris orbitæ se habere circiter ut 18 : 1. Pariter qui sub finem diei 19. Octobris anni 1532. Cometa transiit per perihelium, idem videtur esse qui sub finem diei 16. Januarii anni 1661. ad perihelii locum redivit. Est ergo Cometæ hujus periodus annorum 128., & trium circiter mensium, eademque ratione major semiaxis orbitæ Cometæ ad mediocrem Solis distantiam a Terra invenietur esse circiter ut $25\frac{1}{2}:1$. Cometa etiam anni 1680. idem videtur esse, qui sub mortem Cæsaris, annisque 531., & 1106. jam apparuerat: ac propterea periodum habere debet annorum 575., & major semiaxis orbitæ debet esse ad mediocrem Solis distantiam ut 1382957 : 10000.

Scholion.

Vetustiores Astronomi ad Cassinum usque cum meteoris atmosphæræ nostræ accensuissent Cometarum apparitionem, aut ex vaporibus ætherei spatii nucleum æque, ac caudam consurgere existimassent, de observandis motibus non erant solliciti, nisi quantum phænomeni novitas, & prædictionum astrologicarum vanitas postulare videbatur. Cassinus cum Cometarum motus ad Solem relatos certis legi-

legibus regi comperiſſet, cæleſtibus corporibus ipſos accenſuit, atque annis 1664., & 1665. ad primam duorum Cometarum apparitionem ſubſequentes motus non minus accurate ſupputare, & prænuntiare cœpit, quam Planetarum motus ſoleant determinari. Newtonus vero ſublimioris Geometriæ ſubſidiis ſemitam illius Cometæ, qui anno 1680. apparuit, adeo feliciter ſupputavit, ut error omnis in calculo tam longitudinis, quam latitudinis bis tantum duo minuta prima ſecundis aliquot ſuperaverit. Hallejus in Cometographia immenſo propemodum calculo 24 Cometarum orbitas ſimili ratione determinavit. Alia Cometarum, qui deinde apparuerunt, exempla addiderunt alii Aſtronomi. Elementa motus duorum Cometarum, qui anno 1769. ab initio menſis Septembris ad initium uſque Decembris, & anno 1771. a die 18. Aprilis ad diem uſque 16. Maji obſervari potuerunt, tam accurate ſupputavit Ericus Proſperin Upſalienſis Aſtronomus, ut in priori Cometa non niſi emenſo perihelio obſervationum diſſenſus ſenſibilis evaſerit, in poſteriori vero error omnis longitudinis bis tantum exceſſerit unicum minutum primum, atque error latitudinis plerumque fuerit aliquot ſecundorum. In hiſce omnibus ſupputationibus bina problemata præcipua ſunt: primum ut data orbita parabolica ad datum tempus inveniatur Cometæ locus: alterum ut ex datis tribus obſervationibus inveniatur orbita. Primum problema elegantiſſime ſolutum, conſtructumque in Propoſ. XXX. Lib. I. exhibuit Newtonus, quod nos initio hujus capitis facili methodo expoſuimus. Alterum ſummo ingenio, ac feliciter ſolutum dedit in poſtremis Lib. III. propoſitionibus. Solutio autem in primis poſtulat ut datis rectis, quæ loca Terræ, & Cometæ jungunt, & datis latitudinibus geocentricis inveniantur diſtantiæ illæ, quæ appellantur curtatæ, loci Cometæ ad planum eclipticæ reducti. Gregorius in Propoſ. XXVI. Lib. V. Aſtronomiæ diſtantias vero proximas invenire docuit ope illius problematis, quo inter quatuor rectas poſitione datas ducenda quæritur recta, quæ ab iis ſecetur in ratione data: adnotavitque author idem in propoſitione undecima ejuſdem libri ſolutionem problematis limitatam pluribus in caſibus, ac mancam eſſe: limitationes autem totius ſolutionis rem hanc tractanti per ſe ſatis eſſe obvias, ac manifeſtas. Idem problema diverſis rationibus ab Wrenno, & Walliſio ſolutum Newtonus inſeruit Arithmeticæ univerſali, & binis aliis methodis ſolutum dedit in corollario Lem. XXVII. Lib. I. Princip. Mathem. Eo etiam problemate ad calcem opuſculi de Mundi ſyſtemate uſus eſt Newtonus ad Cometæ trajectoriam inveſtigandam, quæ proxime ad rectam lineam accederet. Verum in Pro-

Propof. XLI. Lib. III. Cometæ trajectoriam accurate determinaturus monuit fe ad hunc finem compofuiffe quædam problemata prioris libri, ac deinde rationes alias ineundo hypothefim motus rectilinei ad orbitas parabolicas transferre noluit. Neque vero opus eft pluribus ut pateat approximationes motus rectilinei hacce in re minime fufficere. Cometam, qui anno 1739. ad eafdem cum Sole partes confpectus fuerat, in hypothefi motus rectilinei ad partes Soli oppofitas rejici eadem calculi ferie compertum eft. Bouguerius etiam in actis Parif. Acad. anni 1733. cum datis tribus longitudinum, & latitudinum obfervationibus determinare docuiffet arcum fectionis conicæ finitimum lineæ rectæ, ejufdem methodi applicatione ad Cometam anni 1730. facta, hyperbolicam femitam invenit pro parabolica. Rejecta hypothefi motus rectilinei, cum generalis æquatio problematis adeo compofita, & implexa fit, falfa pofitio fupereft, qua diftantiæ illæ curtatæ, & elementa orbitæ parabolicæ facilius inveniantur. Approximationum feriem, quæ facilior videtur effe, ex generali, ac geometrica folutione problematis fupra collegimus. Antequam progrediamur ulterius ad variationes illas motuum cæleftium inveftigandas, quæ ex attractione mutua ortum fuum ducunt, indicabimus modo quæ variationes, five ob fucceffivam lucis propagationem, aberrationemque, five ob refiftentiam fluidi illius fubtiliffimi, qui per cæleftia fpatia diffunditur, haberi debeant.

CAPUT QUINTUM.

DE VARIATIONIBUS ORTIS EX LUCIS ABERRATIONE.

Theorema X.

SI celeritas lucis ad celeritatem, qua fpectatoris oculus movetur, datam rationem habeat, & per fidus propofitum, ac fpectatoris femitam traducatur aliquod planum; fidus in eodem plano declinare videbitur ad eam partem, ad quam fpectatoris motus dirigitur, atque erit celeritas lucis ad fpectatoris celeritatem ut finus anguli, quem ipfius femita cum recta ad fidus ducta complectitur, ad finum anguli aberrationis.

Feratur oculus fpectatoris ex A in B, fig. 33., & radius lucis EBC ex fidere aliquo E ad oculum fpectatoris perveniat in loco B, & fit celeritas oculi ad celeritatem lucis, ut AB : BC. Quia communis

munis motus non turbat motus corporum inter ſe, ſtatuamus & luci, & oculo imprimi motum contrarium, & æqualem illi, quo fertur oculus. Lux in quieſcentem oculum illabetur viribus BA, BC, completoque parallellogrammo ABCD, & ducta EF parallela directioni AB, ſidus in loco F, atque in directione DBF videbitur, eritque BE: EF ut celeritas lucis ad celeritatem oculi. Ex F in BA, BE, atque ex E in BF ducantur perpendicula Fe, Fc, Ef. Erit angulus EFf æqualis angulo FBe, & ſimilia erunt triangula Bef, FfE, eritque $Ef = \frac{FE.Fe}{BF}$. Inſuper ob ſimilitudinem triangulorum BFc, BEf erit $Ef = \frac{BE.Fc}{BF}$. Fiet itaque $BE:FE = Fe:Fc$, ſive erit celeritas lucis ad oculi celeritatem ut ſinus anguli FBe, vel EBe, quem ſpectatoris ſemita cum recta ad ſidus ducta complectitur, ad ſinum anguli aberrationis FBc.

Corollarium I.

Quia ſpatium Soli, & Terræ interjectum a luce abſolvitur tempore 8' 12'', ut Bradlejus ex differentia temporum, quibus eclipſes Satellitum Jovialium pro varia Jovis diſtantia obſervari ſolent, optime derivavit: & quia inſuper tota terreſtris orbita a Terra abſolvitur tempore 525969', adeoque tempore 8' 12'' motu annuo a Terra abſolvitur arcus tertiæ circiter partis unius minuti: radius autem circuli æquatur arcui 3438', ut ſupra jam dictum eſt; erit celeritas lucis ad celeritatem Terræ ut $3438:\frac{1}{3} = 10314:1$. Quæ cum ſit ratio ſinus totius ad ſinum anguli 20'', locus Solis viſus a loco vero ad eam partem, ad quam Terræ motus dirigitur, declinare videbitur conſtanti angulo 20''.

Corollarium II.

Si ſtatuamus lucem eadem ſemper celeritate a Sole, & Stellis fixis advenire, atque a Planetis, Cometiſque ad nos reflecti: maxima ſideris cujuſcumque aberratio ob finitam proportionem velocitatum, & Terræ, & lucis genita erit ſemper 20''. Hujuſmodi vero aberratio ex motu annuo Terræ genita ſe habebit ad aberrationem ex motu diurno ortam ſub æquatore in ratione compoſita radii terreſtris orbitæ ad ſemidiametrum æquatoris, & temporis diurnæ revolutionis ad tempus revolutionis annuæ, ſeu proxime ut $62\frac{2}{3}:1$; unde aberratio diurna ne ad tertiam quidem unius

minuti

minuti partem ascendet sub æquatore, aliis autem in locis minuetur adhuc in simplici ratione cosinus latitudinis, & nullibi evadere poterit sensibilis.

Corollarium III.

Si spectatoris oculus in superficie aliorum Planetarum constitueretur, diurnæ, & annuæ aberrationes Solis, ac siderum inter se essent in eadem ratione velocitatis diurnæ, & annuæ: atque ita in æquatore Jovis diurna aberratio major esset aberratione annua. Aberrationes annuæ, & periodicæ in superficie Terræ, ac Planetarum primariorum inter se erunt in ratione subduplicata distantiæ Solis reciproce. In singulorum Satellitum superficie aberrationum species tres esse poterunt, quæ motui Satellitis cujusque circa se ipsum, & circa primarium, ac motui primarii circa Solem respondebunt.

Theorema XI.

Si spectatoris oculus in sectione aliqua conica moveatur, semita apparens fixæ cujuscumque erit circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipsa erit peripheria circuli, prout sectio conica erit ellipsis, aut hyberbola, aut parabola.

In primis si Terra in circulo concentrico moveatur circa Solem, atque accipiatur semper BE : EF ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ, & EF statuatur parallela directioni motus, quem Terra juxta tangentem concipit, stella apparebit semper in puncto F, & unius anni tempore circulum FHG describet, plano circuli $m h$ parallelum, ea quidem lege, ut si in puncto m recta, quæ ad stellam ducitur perpendicularis sit directioni Terræ, & stella videatur in loco M, acceptis æqualibus angulis $m S h$, MEH, stella ex h videri debeat in loco H, atque ita ex adversis aliis orbitæ punctis videatur in G, & N. Quod si Terra in ellipsi circa Solem S moveri intelligatur, Terræ velocitas in loco quolibet erit reciproce ut perpendiculum ductum a foco in tangentem orbitæ, sive directe ut recta, quæ in eodem perpendiculo producto interjicitur foco ellipseos, & peripheriæ circuli circa ellipsim descripti. Scilicet, in fig. 27., velocitas est reciproce ut PC, sive directe ut Cc. Quare cum recta EF, fig. 33., sit semper velocitati Terræ proportionalis, manifestum est ipsam ad alium circulum FGN terminari oportere, qui subverse sit positus, & similiter excentricus quam qui terrestri orbitæ circumscribitur. Patet insuper quod

si axis major ellipseos circa Solem descriptæ eousque augeri intelligatur, ut ellipsis abeat in parabolam, dum spectatoris oculus erit in ipso orbitæ aphelio, evanescet recta EF, quæ est semper velocitati Terræ proportionalis, & circulus apparentis motus FHG transibit per punctum E. Patet denique quod si parabola in hyperbolam convertatur, & focus hyperbolæ sit extra ipsius perimetrum, centrum E apparentis aberrationis cadet extra peripheriam circuli FHG.

Corollarium I.

Recta BF, quæ a Terra ducitur ad puncta singula circuli FHG, ob maximam fixarum distantiam, veluti ex foco orbitæ ellipticæ ducta potest intelligi: quo posito recta eadem superficiem coni scaleni designabit, cujus vertex erit ipse oculus spectatoris, basis vero erit circulus FHG plano orbitæ parallelus. Ut ergo habeantur loca, ad quæ referetur stella, & in cælo e tellure spectabitur, secari intelligatur conus in puncto E plano, quod per rectam MG transeat, & sit rectæ BE perpendiculare. Sectio erit ellipsis, & major axis ellipseos MG ad minorem se habebit ut sinus totus ad sinum inclinationis rectæ BE ad basim coni, sive ut sinus totus ad sinum anguli, quem recta eadem efficit cum plano eclipticæ, & qui stellæ latitudinem metitur.

Corollarium II.

Si stella in plano eclipticæ collocetur, ellipsis omnis in rectam MG abibit, & apparentes stellæ excursiones citra, & ultra locum verum habebuntur dumtaxat in plano eclipticæ, erroresque omnes longitudinem stellæ afficient, non latitudinem. Si stella reperiatur in polo eclipticæ, ellipsis abibit in circulum FGN. Universim major axis MG jacebit in plano circuli ad eclipticam paralleli, & complectetur 40'' circuli unius maximi: atque axem ipsum majorem dividendo per radium circuli ejusdem paralleli, sive per cosinum latitudinis stellæ, prodibit angulus quem axis ad centrum circuli subtendet, seu quo variabitur stellæ longitudo. Minor axis jacebit in plano circuli latitudinis, & erit sinui ipsius latitudinis proportionalis.

Corollarium III.

Quod si jam FHG non circulum, & coni basim, sed ellipsim illam designet, quam stella apparenti motu percurrere videtur, & sit minor axis ellipseos NH, atque ex perimetri puncto F in majo-

jorem axem MG ducatur perpendiculum F*f*; erit F*f*, five E*c* vavariatio latitudinis apparentis fideris, eaque ad variationem maximam fe habebit ut F*f*: HE. Erit etiam variatio maxima longitudinis ad variationem habitam dato tempore ut ME: F*c*. Differentia vero majoris femiaxis ME, & femidiametri FE erit quarta proportionalis ad quadratum finus totius, quadratum finus anguli MEF, five MSB, & differentiam femiaxium ME, HE. Erit denique finus totus ad finum, aut cofinum anguli *m*SB, ut FE ad F*f*, five ad F*c*. Quo dato aberratio longitudinis, & latitudinis dato quocumque tempore fupputari facile poterit.

THEOREMA XII.

Iifdem pofitis erit celeritas luminis ad Planetæ cujufque celeritatem ut cofinus angularis diftantiæ Planetæ ipfius a Terra, & Sole ad fummam, vel differentiam finuum aberrationis lucis Planetæ, & Stellæ illius fixæ, ad quam e Terra refertur idem Planeta.

Si velocitas Terræ T fecundum rectam TD, fig. 20., accipiatur pro unitate, manentibus cæteris ut in Cor. III. Probl. I., erit velocitas Planetæ P fecundum PG $= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}$, & velocitas fecundum GO ipfi TP perpendicularem erit $= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \text{cof.SPM}$, ac denique Planetæ velocitas fecundum G*b* parallelam directioni Terræ TD erit $= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\text{cof.SPM}}{\text{fin.G}bO}$.

Intelligamus jam Terræ, & Planetæ imprimi contrario fenfu velocitatem ipfam $\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\text{cof.SPM}}{\text{fin.G}bO}$, ut planeta pofito in recta SP fit Terræ velocitas fecundum $\text{DT} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\text{cof.SPM}}{\text{fin.G}bO} \mp 1$, & valeat fuperius fignum quando Planeta eft citra Solem, inferius vero quando eft ultra. Juxta Theor. XI. erit celeritas lucis ad eamdem Terræ celeritatem, ut finus anguli DTP, quem directiones Terræ, & lucis a Planeta advenientis intercipiunt, ad finum anguli aberrationis, quæ ex luce oritur. Quod fi igitur ftatuamus eamdem effe celeritatem lucis, quæ a fixis, & Sole advenit, quæque reflectitur a Planetis, erit finus anguli aberrationis $= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \text{cof.SPM} \cdot 20'' \mp \text{fin.DTP} \cdot 20''$:

& cum fit fin. DTP. 20'' aberratio lucis in ftella fixa, quæ cum Terræ femita comprehendat angulum DTP, & velocitas lucis ad Planetæ

velocitatem se habeat ut $1 : \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} . 20''$, patet analogia propositionis.

COROLLARIUM I.

Planetæ igitur inferiores ante primam, & inferiorem conjunctionem cum Sole angularem distantiam a Sole visam e Terra habebunt auctam aberratione lucis, & imminutam post conjunctionem. Ante conjunctionem aliam superiorem rursus augebitur ipse angulus, & post conjunctionem minuetur. Scilicet circa primam conjunctionem minuetur Planetarum retrogradatio, & apparens longitudo augebitur: circa alteram vero Planetarum directio, & longitudo apparens imminuetur. In Planetis superioribus post oppositionem, & conjunctionem minuetur angulus distantiæ a Sole, & ante augebitur: scilicet in oppositione augebitur longitudo apparens Planetarum, & imminuetur ipsa in conjunctione.

COROLLARIUM II.

Si sit ut antea in eodem Corollario Probl. I. cos. SPM $= \frac{\sqrt{(r^2 - R^2 . \text{sin.} X^2)}}{r}$, & sin. DTP $=$ cos. X, fiet differentia loci veri, ac visi, sive aberratio, quæ ex luce orietur $= \frac{\sqrt{R} . \sqrt{(r^2 - R^2 . \text{sin.} X^2)} . 20'' \mp \text{cos.} X . 20''}{r \sqrt{r}}$, ac si sit insuper sin. X $= 0$, in oppositione Planetarum superiorum, & prima inferiorum conjunctione erit angulus aberrationis $\frac{\overline{\sqrt{R} - 1}}{\sqrt{r}} . 20''$, & in conjunctione alia ultra Solem $\frac{\overline{\sqrt{R} + 1}}{\sqrt{r}} . 20''$, atque erit aberrationis quantitas in primo casu ad quantitatem aberrationis in casu altero ut differentia ad summam velocitatum Planetæ, & Terræ.

COROLLARIUM III.

Si pro Mercurii orbita fiat $r = 3827$, & $R = 10000$, erit $\sqrt{Rr} = 6186$, & $\frac{\overline{\sqrt{R} - 1}}{\sqrt{r}} . 20'' = \frac{2359}{3827} . 20'' = 12\frac{1}{3}''$. Itaque aberratio, quæ in prima conjunctione Mercurii cum Sole orietur ex data ratione velocitatum Terræ, Mercurii, & lucis, erit $12\frac{1}{3}''$: & in conjunctione alia superiori aberratio omnis fiet circiter $54''$. Pariter si pro orbita Veneris fiat $r = 7233$, & $R = 10000$, erit in

in conjunctione inferiori Veneris cum Sole aberratio hujusmodi $= 3\frac{1}{2}''$, & in superiori conjunctione $= 43\frac{1}{2}''$.

COROLLARIUM IV.

Similibus substitutionibus prodibit aberratio Martis, quando Soli opponetur, circiter $3.7''$, & conjunctionis tempore $36.2''$. Aberratio Jovis erit, in oppositione quidem $10.6''$, in conjunctione vero $29.4''$. Saturni aberratio erit in oppositione $13\frac{1}{2}''$, & in conjunctione $26\frac{1}{2}''$ circiter. Aberratio lucis in Sole fiet semper ad eamdem partem, & longitudinem Solis constanter imminuet angulo $20''$. Lunæ aberratio erit minor in ratione velocitatis. Aberrationes latitudinis, & aberrationum aliarum æquationes, quæ orientur ex orbitarum ellipticitate, minores erunt quam ut ipsarum ratio aliqua haberi debeat.

COROLLARIUM V.

In Planetarum stationibus aberratio nulla erit. In prima conjunctione inferiorum Planetarum, & superiorum oppositione aberratio lucis erit differentia duarum aberrationum, quarum una $\text{cos}. X . 20''$ orietur ex annuo motu Terræ, & eadem erit aberratio stellæ illius fixæ, ad quam Planeta e Terra referri potest: altera vero

$$\frac{\sqrt{R}.\sqrt{(r^2 - R^2.\text{sin}. X^2)}}{r\sqrt{r}}.20''$$

ex motu Planetæ orietur, eritque æqualis aberrationi Terræ immobilis visæ e Planeta, sive aberrationi alterius stellæ fixæ, ad quam Terra e Planeta referretur. In Planetarum conjunctione ultra Solem aberrationum duarum summa accipienda est.

SCHOLION.

Bradlejus in litteris ad Hallejum datis apparentem detexit fixarum inæqualitatem, quæ Planetarum etiam, Cometarumque esse debet, quamque aberrationem lucis vocavit ipse quod pendeat ex finita proportione velocitatis Terræ, & lucis. Inæqualitatis hujus phænomena Bradlejus satis accurate explicari dixit hypothesi quod annis singulis stella quævis perimetrum ellipseos circumeat, cujus centrum sit verus stellæ locus, major axis exæquet $40''$ circuli unius maximi, & jaceat in plano circuli ad eclipticam paralleli, atque ad minorem axem in plano circuli latitudinis positum se habeat ut sinus totus ad sinum latitudinis stellæ propositæ. Majorem axem Astronomus celeberrimus cum primo $40''$, aut $41''$ esse dixisset, postmodum $40''$ tantum constituit in Transf. Philosf. num. 485,

ipsam-

ipsamque hypothesim pluribus fixarum duodecim observationibus deprehendit omnino consonam. Manfredius To. I. Comment. Bononiensis Academiæ cum Sirium, Capellam, humerum Orionis, & Aldebaran Lyræ, ac deinde Aldebaran, & Capellam Arcturo comparasset, repetitis observationibus hypothesim sic probavit ut error omnis vix aliquando prodierit 2''. Phænomenon Manfredius ipse exemplo lapidis in navim motam projecti; & exemplis pluviæ decidentis, ac tubi mobilis explicavit D. Clairaut in Comment. Paris. anni 1737. Idem etiam phænomenon singillatim ad calculum revocavit Simpsonius in specimine Mathematico, quod anno 1740. Londini editum est, & Winsheim tomo primo Novorum Comment. Acad. Petropolitanæ. Clairautius insuper in Actis anni 1746. problema aberrationis lucis longiori calculo a stellis fixis ad Planetas omnes traduxit. Nos in postremo hoc capite rationes illas secuti, quas proposuimus tomo secundo Dissertationum anno 1761. Lucca editarum, in priori theoremate aberrationem lucis ex primis relativi motus principiis derivavimus: deinde secundo loco elegans Sympsonii theorema generaliter proposuimus: ac denique facilem regulam tradidimus, qua in supputandis Planetarum superiorum, & inferiorum aberrationibus eosdem fere Clairautii numeros obtinuimus.

CAPUT SEXTUM.

DE VARIATIONIBUS ORTIS EX MEDII RESISTENTIA.

PROBLEMA X.

SI globus in medio aliquo satis raro, & uniformiter resistente moveatur, & data sit ratio densitatis & globi, & medii, invenire motus retardationem.

Inprimis manifestum est quod si in eodem medio cylindrus globo circumscriptus secundum directionem axis uniformiter progrediatur, æquale volumen fluidi directe pellet e loco suo, &, si fluidum sic rarum sit ut elasticitas possit negligi, quo tempore longitudinem axis percurret, amittet eam quantitatem motus, quæ ad quantitatem totam se habebit ut densitas fluidi ad cylindri, & globi densitatem. Deinde patet quantitatem motus globi ad quantitatem motus cylindri se habere in ratione eadem soliditatum, sive ut $2:3$, quantitatem vero motus in medio resistente amissi a globo motus amissi

a cy-

a cylindro dimidiam esse. Nam si motu omni ad medium translato intelligamus singulas ipsius particulas velocitate æquali, & contraria secundum directiones axi PQ parallelas, fig. 34., in quiescentem globum incurrere, erit vis absoluta particularum in P, & B ad vim perpendiculariter superficiei globi impressam in puncto B ut AB:BF, & posterior hæc vis ad vim residuam, quæ inde exsurget parallele axi PQ se habebit rursus ut AB:BF. Quare planis quibuslibet per axem PQ traductis erit vis absoluta fluidi, qua in cylindri basim directe incurreret ad totam vim globo impressam in punctis quotcumque B ut summa quadratorum ex radiis omnibus ad summam quadratorum ex sinubus quotcumque rectis, sive ut 2:1, eademque erit pariter ratio virium a cylindro, & globo ad contrariam partem quiescenti fluido impressarum. Quare si globi densitas ad densitatem medii se habeat ut D:1, compositis rationibus erit globi velocitas ad velocitatem amissam quo tempore tota axis longitudine promovebitur ut 4D:3, & si sphæræ radius sit R, & velocitas prior accipiatur loco unitatis, post spatium Z emensum, erit velocitas a globo amissa $= \frac{3Z}{8DR}$.

Corollarium I.

Si cylindri magnitudinem, velocitatemque variari intelligamus, data velocitate, & dato tempore resistentia manifeste augebitur in simplici ratione sectionis auctæ, sive in duplicata ratione diametri: data vero sectione erit resistentia ut numerus particularum medii dato tempore a cylindro impulsarum, & velocitas, qua impellentur, conjunctim: & quia numerus particularum earumdem proportionalis est toti impulsus velocitati; augebitur resistentia in ratione duplicata velocitatis: & quia denique resistentiæ cylindri, & globi datam rationem habent inter se invicem, resistentia etiam globi universim erit in duplicata ratione diametri, & duplicata velocitatis.

Corollarium II.

Si medium sit summe elasticum duplam velocitatem cæteris paribus amittet globus, alteram ictu, alteram elasticitate, quæ æquali, & contraria vi figuram particularum omnium restituet. Si medium aliquam tantum elasticitatem habeat, hæc altera velocitatis pars minuenda erit in ratione vis elasticæ ad totam vim compressionis. Eritque resistentia adhuc minor si non adeo rarum sit medium

ut

ut motus omnis a globo ad particulas singulas illico transfundi debeat, sed qui prioribus particulis motus globi contactu imprimitur inde ad contiguas omnes aliqua ratione transeat, & quæ in motum semel sunt actæ quiescentes alias depellere incipiant e locis suis.

Corollarium III.

Sed neque ex tota densitate æstimanda erit medii resistentia si adeo parva sit densitas ut interius vacuas globi partes pervadat medium, & non extimæ tantum superficiei affusum sit. In casu enim particularum libere globum permeantium tanto minor earumdem numerus processu globi impelletur quanto plus vacui spatii circa solidas corporis partes intus supererit: ut si globus eamdem habuerit aquæ densitatem, scilicet si novendecim vicibus fuerit auro rarior, quod non adeo compactum est ut meatibus vacuis careat; plusquam novendecim vicibus minor resistentia esse debeat. Hic vero præcipue evolvemus casum fluidi exterius affusi, qui est casus æris, & atmosphæræ Solis superficiem Terræ, Lunæ, & aliorum Planetarum circumambientis.

Problema XI.

Si Planeta aliquis progrediatur in medio uniformiter resistente invenire variationem temporis totius periodici.

Si ad inveniendas periodici temporis variationes habeantur orbitæ pro circularibus, negliganturque inæqualitates aliæ, quæ pendent ex orbitarum ellipticitate, atque excentricitate, quæ oppositione signi rectorum sinuum, ac cosinuum ex adversis partibus debent destrui: & si insuper sit A radius alicujus orbitæ, & Z non arcum, sed potius angulum descriptum circa centrum designet; post arcum AZ percursum absoluta projectionis velocitas imminuetur in ratione simplici $1 - \frac{3\,AZ}{8\,DR} : 1$, & radius vector minuetur in ratione eadem duplicata. Et quia, ob æquales areas æqualibus temporibus descriptas, data velocitate projectionis, angularis motus augetur in duplicata ratione imminuti radii, atque universim est angularis motus ut velocitas projectionis directe, & quadratum vectoris radii reciproce; ob medii resistentiam angularis motus variabitur in ratione triplicata reciproca velocitatis, sive in ratione directa simplici $1 : 1 - \frac{3\,AZ}{8\,DR}$. Quod si igitur elementum ejusdem

motus

motus fit dZ, fummis acceptis, ob medii refiftentiam motus omnis augebitur in ratione $Z : Z - \frac{9\,AZ^2}{16\,DR}$: & quia tempus, quo datus angulus abfolvitur circa centrum, eft reciproce ut motus angularis, minuetur tempus in ratione $Z - \frac{9\,AZ^2}{16\,DR} : Z = 1 - \frac{9\,AZ}{16\,DR} : 1$. Hoc autem pofito fi fiat $\frac{3}{8\,DR} = \varpi$, & radius ad peripheriam fe habeat ut $1 : p$, ac Solis maffa vocetur M', adeoque fit projectionis velocitas $\frac{M'}{A^2} \cdot A$, & orbitæ perimetrum per velocitatem dividendo liberæ periodi tempus effe debeat $\frac{pA^2}{M'}$, fiet ob medii refiftentiam tempus periodicum $\frac{pA^2}{M'} \cdot (1 - \frac{1}{2}\varpi pA)$.

Corollarium I.

Ex priori expreffione temporis $Z - \frac{3}{2}\varpi AZ^2$ manifeftum eft variationem illam, quæ pendet ex medii refiftentia, augeri in duplicata ratione temporis. Ex pofteriori autem formula manifeftum eft, quod fi radius terreftris orbitæ accipiatur femidiametrorum terreftrium 22918, & fit $D : 1$ ratio mediæ telluris denfitatis ad denfitatem ætherei medii, ob ejufdem refiftentiam prodibit Solaris anni imminutio $= \frac{3}{2}\varpi pA \cdot 365\frac{1}{4}^2 = \frac{9pA \cdot 365\frac{1}{4}^2}{16\,DR} = 80996\frac{1}{3} \cdot \frac{365\frac{1}{4}^2}{D}$:
adeoque medii denfitas $80996\frac{1}{3} \cdot 365\frac{1}{4} \cdot 24 \cdot 3600$ vicibus minor effe debet denfitate Terræ ut annua variatio fit unius fecundi temporis: quæ quantitas aucta in ratione temporis duplicata, poft aliquot revolutiones, certo fenfibilis evaderet.

Corollarium II.

Quod fi Planetæ alterius radius fit r, orbitæ radius a, ratio denfitatum Planetæ, & medii $E : 1$; erit integra revolutione variatio motus medii in priori quidem Planeta $\frac{9pA}{16\,DR} \cdot 360°$, in altero autem $\frac{9pa}{16\,Er} \cdot 360°$, & variationem hanc alteram augendo in du-

plicata ratione temporis, ſive in ratione triplicata vectoris radii, variationes motus, & loci medii habitæ eodem tempore inter ſe erunt ut $\frac{a^3}{DR} : \frac{A^3}{Er}$. Denique ſi maſſæ duorum Planetarum ſint M, & m, ac ſit propterea $D : E = \frac{M}{R^3} : \frac{m}{r^3}$, poſita eadem utrobique medii denſitate, variationes habitæ eodem tempore inter ſe erunt ut $\frac{a^3 R^2}{M} : \frac{A^3 r^2}{m}$.

Corollarium III.

In hypotheſi vero medii hetherogenei variatio utraque augenda, aut minuenda erit in ſimplici ratione denſitatis, ut, ſi denſitas ſit in ratione duplicata reciproca vectoris radii, variationum ratio eſſe debeat $\frac{a^4 R^2}{M} : \frac{A^4 r^2}{m}$, quæ componitur ex inverſis ſimplicibus maſſæ, & vectoris radii, inverſa duplicata temporis periodici, & duplicata directa radii Planetæ. Ita ſi Terræ, & Veneris volumen ſtatuatur idem, & maſſæ ſint inter ſe ut 3 : 2, radii vero orbitarum ut 10000 : 7233, in eadem denſitatis hypotheſi variationes motus medii inter ſe erunt ut $1 : 5\frac{1}{2}$ ſatis proxime. In Jove, & Saturno variationes evadent omnino exiguæ.

Problema XII.

Iiſdem poſitis invenire variationem medii motus Satellitis.

Feratur Planeta A, fig. 34., dato tempore ex A in C, & ſit BM ſpatium, quod eodem tempore Satelles B juxta tangentem circularis orbitæ abſolveret, accipiaturque BG parallela, & æqualis ipſi AC, completoque parallelogrammo ſit abſoluta Satellitis velocitas BD. Ex D in BG, & AB productas demittantur perpendicula DN, DH, & ſit $AB = 1$, $BF = y$, $AF = x$, $AC = BG = C$, $BM = c$. Ob æqualitatem angulorum GBM, FBA, qui cum eodem MBF ſinguli unum rectum conficiunt, erit $GN = GD . \cos. MBG = cy$, & $DN = cx$, adeoque erit $BD^2 = C^2 + c^2 \pm 2Ccy$: & quia BM^2 præ BG^2 ſatis parva cenſeri poteſt, erit quam proxime $BD = C \pm cy$. Erit inſuper $\cos. DBH = \cos. \overline{DBN + FAB} = \frac{BN}{BD} . \frac{AF}{AB} - \frac{ND}{BD} . \frac{BF}{AB}$: atque ob $BN = BG + GN$, & $GN = ND . \frac{BF}{AF}$ prodibit $\cos. DBH =$

BG

$\frac{BG}{BD} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{Cx}{BD}$. Denique erit fin. DBH $= \frac{1}{BD}\sqrt{BD^2 - C^2x^2}$, quæ quantitas reductis terminis evadet $\frac{c \pm Cy}{BD}$.

His positis si radius Satellitis sit r, & ratio densitatum $E : 1$, ac fiat $\frac{3}{8Er} = \alpha$, per Coroll. I. Probl. X. erit resistentia Satellitis in spatio absoluto $\alpha . \frac{BD^2}{BM^2}$, & vis inde orta juxta vectorem radium erit $\alpha . BD . \frac{Cx}{c^2}$: & cum Planetæ A resistentia juxta eamdem directionem sit $\alpha . \frac{C^2}{c^2}$. cos. BAF; erit $\alpha . \frac{C^2}{c^2} . x \pm \alpha . \frac{C}{c} . xy - \alpha . \frac{C^2}{c^2} . x$ vis omnis, qua Satelles ob medii resistentiam a Planeta primario distrahetur, & termini ejusdem singuli signorum oppositione in adversis quadrantibus compensabunt se se invicem, ac destruent. Erit etiam resistentia Planetæ perpendiculariter ad vectorem radium $\alpha . \frac{C^2}{c^2} y$, eademque vis hujusmodi quæ aliarum præcedentium erit ratio. Erit denique perpendicularis resistentia Satellitis $\alpha . \frac{BD^2}{c^2}$. fin. DBH $= \frac{\alpha}{c^2} . BD . \overline{c \pm Cy} = \frac{\alpha}{c^2} . \overline{C \pm cy} . \overline{c \pm Cy}$.

Itaque pro y^2 scribendo $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. 2 BAF, negligendoque terminos se se invicem ambiguo signo destruentes, ex vi omni $\alpha . \frac{BD^2}{BM^2}$ supererit vis $\frac{3\alpha . C}{2c}$, qua juxta tangentem orbitæ continue Satellitis velocitas imminuetur. Jam vero si radius orbitæ Satellitis vocetur a, & periodica tempora Planetæ, ac Satellitis sint inter se ut $1 : n$, erit $C : c = pA : \frac{pa}{n}$. Quare si angularis motus Satellitis sit z, post percursum spatium az minuetur velocitas in ratione $1 - \frac{3}{2}\alpha n A z : 1$, & elementum angularis motus augebitur in ratione $1 : 1 - \frac{9}{2}\alpha n A z$, & cum elementum idem sit dz, summis similiter acceptis, motus omnis angularis z ob medii resistentiam fiet $z + \frac{9}{4}\alpha n A z^2$, & tempus periodicum minuetur

tur in ratione $1 - \frac{9}{4} \omega n A z : 1$. Scilicet si tempus periodicum Planetæ ut antea sit $\frac{p A^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}$, & tempus Satellitis $\frac{p n A^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}$, loco z, sive $\frac{1}{n} . Z$ scribendo $\frac{1}{n} . p$; ob medii resistentiam tempus periodicum Satellitis evadet dumtaxat $\frac{p n A^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{9}{4} \omega p A\right)$.

COROLLARIUM I.

Quia variatio angularis motus $\frac{9}{4} \omega n A z^2$ augetur in duplicata ratione temporis, integra Planetæ primarii revolutione, sive revolutionibus $\frac{1}{n}$ Satellitis, fiet variatio temporis ipsius periodici — $\frac{9 \omega p^2 A^3}{4 n M^{\frac{1}{2}}}$, eruntque variationes primarii Planetæ, & Satellitis habitæ eodem tempore inter se ut $2 n \varpi : 3 \omega$. Jam vero si M, & m sint Planetæ, & Satellitis massæ, densitates vero præ medii densitate sint D, & E, erit $\varpi : \omega = \frac{3}{8 DR} : \frac{3}{8 E r} = \frac{R^2}{M} : \frac{r^2}{m}$. Itaque erit variationum earumdem ratio $\frac{2 n R^2}{M} : \frac{3 r^2}{m}$.

COROLLARIUM II.

Quia Terræ, & Lunæ diametri sunt inter se ut $365 : 100$, massæ autem ut $62.8 : 1$, quemadmodum ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis colligitur, loco n scribendo $\frac{27}{365}$, variationes periodi Terræ, & Lunæ habitæ eodem tempore inter se erunt ut $1 : \frac{3}{2} . \frac{365}{27} . \frac{628}{10} \left(\frac{100}{365}\right)^2 = 1 : 95.6$.

Quare si æquatio sæcularis medii motus Lunæ ex resistentia alicujus fluidi circumfusi undique oriatur, atque ad $7''$ usque pertingat circuli unius maximi; sæcularis æquatio medii motus Terræ ob eamdem caussam non nisi $0.073''$ circiter esse poterit: scilicet fluidi resistentia æquationem sensibilem medii motus Lunæ exhibere poterit quin medium Telluris motum sensibiliter afficiat.

Co-

COROLLARIUM III.

Si atmosphæra Terræ usque ad Lunæ superficiem elevaretur, & communi cum Terra, & Luna motu revolveretur circa Solem, non aliam Lunæ resistentiam objiceret, quam quæ oriretur ex motu Lunæ circa Terram: sub eadem scilicet prioris fluidi densitate post percursum spatium $a z$, ob resistentiam terrestris atmosphæræ, Lunæ deficeret velocitas dumtaxat $\omega\, a z$, & resistentia fluidi circa Terram simul cum Luna moti ad resistentiam fluidi alterius æque densi, & immobilis se haberet ut $1 : \frac{3 n A}{2 a}$, seu circiter ut $1 : 42\frac{1}{2}$. Itaque nisi atmosphæra Terræ præ fluido alio spatiis cælestibus undique affuso sit multo densior sensibilem medii motus Lunæ variationem gignere nequaquam poterit. Fluidi alterius subtilissimi, & poros Lunæ, & Terræ permeantis resistentia minor adhuc præ tota densitate esse debet ut in Coroll. III. Probl. X. dictum est.

SCHOLION.

Hallejus in notis ad Albategnii observationes jam noverat medium tempus periodicum tum Lunæ circa Terram, cum Terræ circa Solem successu temporis fieri brevius. Majerus autem in tabulis simul observationibus omnibus collatis aliquam utique esse invenit medii motus Lunæ accelerationem, quæ ab Arabum temporibus ad nos usque $9'$, & sæculo hoc nostro $7''$ circiter videtur esse, quæque augetur semper in duplicata ratione temporis: nullam autem sensibilem invenit variationem medii telluris motus. Newtonus pag. 481. prioris editionis Princip. Mathem. suspicatus fuerat sæcularem Lunæ æquationem inde exoriri quod vapores e Sole, ac Stellis fixis, Cometarumque caudis assurgentes incidant in atmosphæram nostram, & Terræ massam, ac vim attractricem augeant. Is autem locus cum in editione tertia Principiorum ommissus fuerit, fortasse conjecturam omnem Newtonus deinde improbavit, sive quod vapores ex Sole, ac Stellis fixis assurgentes ad Terram usque pervenire nequeant, sive quod Cometarum caudæ leviores sint, nec nisi quandoque Cometa aliquis propius Terræ accesserit. Post eam autem detectam accelerationis legem, qua motus Lunæ medius augetur in duplicata ratione temporis, minus recte phænomenon incremento terrestris massæ tribui videretur, unde accelerationes exiguæ nulla constanti lege, & dumtaxat subsultim haberi possent. Clarifs. Bossut in dissertatione, quæ anno 1762. a Parisiensi Academia præmium retulit, ingeniose ostendit quod quæ hypothesis resi-

sten-

ſtentiæ, ac denſitatis ætheris nullam variationem ſenſibilem medii motus Terræ, atque anni Solaris gigneret, ea exhibere poſſet accelerationem ſenſibilem medii motus Lunæ, & æquationem creſcentem in duplicata ratione temporum. Inferius generalem calculum variationum, quæ ex reſiſtentia medii oriri poſſunt, eruemus ex generali ſolutione problematis trium corporum ſe ſe invicem attrahentium. Hic vero indicare voluimus quam breviter authoris ejuſdem, & Alembertii formulæ, pro ſupputandis mediorum motuum inæqualitatibus, ex primis reſiſtentiæ notionibus poſſint colligi. Verum cum de reſiſtentia medii cæleſtis agitur, atmoſphæra Solis, aut Terræ potius quam æther undique affuſus, & libere corpora omnia pervadens ſpectari debet. Ætherem hujuſmodi Newtonus in quæſt. 18. Opticæ per cæleſtia etiam ſpatia latiſſime diffundi cenſuit, atque ex ipſius vibrationibus non effuſionem caloris ſolum, verum etiam lucis inflexionem, reflexionemque, ac refractionem, vices facilioris reflexionis, tranſmiſſioniſque, & lucem ipſam, elaſticitatem, gravitatemque ortum ducere in ſubſequentibus quæſtionibus ſe ſuſpicari dixit, & in poſtremo ſcholio Principiorum plura ſe excogitaſſe indicavit circa eam fluidi actionem, qua proxime corporum particulæ attrahuntur, & contiguæ cohærent, & agunt in corpora electrica ad majores diſtantias, & lux emittitur, reflectitur, frangitur, & corpora calefacit. In diſſertatione de natura, & motu ætheris, ac phænomenis inde pendentibus, hiſce omnibus conjecturis, plures alias adjecimus ex legibus productionis, ac communicationis ignis, lucis, electricitatis, aliiſque elaſticitatis, cohærentiæ, attractionis, repulſioniſque phænomenis derivatas, quas modo conjecturarum omnium cujuſcumque generis pertæſi nolumus recenſere. Hoc ipſo autem quod fluidum hujuſmodi æthereum tam rarum ſit ut corporum poros pervadat, electricitatemque, ac fortaſſe etiam lucem conſtituat, juxta Coroll. III. Probl. X., ad retardandam Planetarum velocitatem multo minus debet conducere ac atmoſphæra Solis, quæ Solis radios reflectendo phænomena zodiacalis luminis exhibet, quæ vapores, exhalationeſque ex Cometarum capite aſſurgentes altius ad formam caudæ cogit aſcendere, quamque ultra Terræ, & Martis orbitam protendi ex phænomenis ejuſdem luminis colligitur. Itaque acceleratio medii motus Lunæ potius atmoſphæræ Solis, quam ætheris reſiſtentiæ debet tribui. Atmoſphæra Terræ, ſi aduſque ſuperficiem Lunæ pertingat, juxta poſterius corollarium, multo denſior atmoſphæra ſolari eſſe debet ut imminutæ velocitatis, & periodici temporis partem aliquam ſenſibilem ſibi vindicet.

DE

DE CIRCULARIS MOTUS PERTURBATIONIBUS.

LIBER SECUNDUS.

PRiorem illam motuum lunarium inæqualitatem, quæ centri æquatio dicitur, & quàm in Coroll. III. Probl. VI. per partes singulas definire cœpimus, æquationisque ejusdem correctionem, quæ secunda Lunæ inæqualitas, & evectio etiam appellatur, Astronomi veteres comparatis sæpius observationibus agnoverunt. Inæqualitatis utriusque quantitates, leges, ac correctiones omnes, & tertiam Lunæ inæqualitatem, quæ proprie dicitur variatio, quæque aliis Satellitum Jovialium æquationibus est analoga, Newtonus primum accuratioribus observationibus definire, & partim etiam ex theoria gravitatis derivare cœpit. Ptolemæus inter se comparatis Hipparchi observationibus deprehendit medii, & veri motus Lunæ differentiam non esse minorem 5° cum linea apsidum lunaris orbitæ lineam a terra ductam ad Solem intersecat ad rectos angulos: esse vero etiam $7\frac{2}{3}{}^{\circ}$ cum linea eadem apsidum dirigitur ad Solem: adeoque mediocrem æquationem centri constituit Ptolemæus $6\frac{1}{3}$, & evectionem Lunæ $1\frac{1}{3}{}^{\circ}$, addendam cum Luna simul in quadraturis Solis, & lineæ apsidum reperitur, detrahendamque cum novilunium, & plenilunium in quadraturis apsidum contingunt. Keplerus, & Horroxius censuerunt evectionem ex variabilitate excentricitatis lunaris orbitæ oriri: quam hypothesim Newtonus in scholio theoriæ lunaris ita explicandis omnibus observationibus accommodavit. Sit in fig. 35. TC excentricitas media lunaris orbitæ partium 0.05505 radii mediocris, producaturque TC in B ut sit CB sinus aberrationis maximæ apogæi lunaris a loco medio. Cum juxta observationes sit maxima hujusmodi distantia $12^{\circ}\ 18'$, fiet sinus $0.01172\frac{3}{4}$ posito sinu toto 0.05505. Centro C, ac radio CB describatur circulus, accipiaturque angulus BCD æqualis duplæ distantiæ loci veri Solis a loco apogæi Lunæ correcto per æquationem illam, quæ annua dicitur. Juxta Newtonum exhibebit recta TD quantitatem veram excentricitatis pro dato apogæi loco, & angulus

gulus BTD æquationem motus mediocris apogæi Lunæ: eritque excentricitas maxima $TB = 0.06677\frac{1}{4}$, quæ respondebit æquationi centri $7^{\circ}\frac{2}{3}$ circiter: & minima excentricitas $TA = 0.04332\frac{1}{4}$, quæ respondebit æquationi centri circiter 5°.

Hujusmodi autem annua æquatio est quæ variatur in eadem ratione sinus distantiæ Terræ a summa apside orbitæ descriptæ circa Solem. Ipsam a Tychone primum, & Keplero agnitam Horroxius in maxima sui quantitate statuit $11\frac{1}{2}'$, Hallejus $13'$, Newtonus $11'\ 50''$, ut si anomalia media Solis vocetur Y, universim æquatio esse debeat $11'\ 50''$. sin. Y, addaturque propterea motui medio Lunæ pergente Terra ab aphelio ad perihelium, detrahaturque in adversa parte orbitæ. Neglecta vero, ob parvitatem, æquationis hujus correctione, si angulus BCD sit dupla Solis distantia ab apogæo Lunæ, ex Newtoniana constructione facile patebit, quæ evectionis lex, sive, ut vocant, argumentum esse debeat. Nam si Lunæ locus sit L erit 2TLC media æquatio centri, 2TLD vera centri ipsius æquatio ad tempus datum, & duarum æquationum differentia, seu Lunæ evectio 2DLC, eritque anguli hujus sinus

$$\frac{2DG}{LD},\ \text{seu proxime}\ \frac{2DG}{LC} = \frac{2DC}{LC}.\ \text{sin. DCL}.$$ Quare si angulus

LCB distantiæ Lunæ a loco apogæi medio visæ e centro vocetur cZ, atque is quam proxime censeatur angulus anomaliæ Lunæ mediæ, & X sit angulus distantiæ mediæ Lunæ a Sole e Terra visæ, quia motus Lunæ ab apogæo major est motu Lunæ a Sole, erit angulus $BCD = 2cZ - 2X$, & angulus $DCL = 2X - cZ$: scilicet anomalia media Lunæ dempta dupla distantia Solis ab apogæo Lunæ æqualis erit duplæ distantiæ Lunæ a Sole dempta anomalia Lunæ media. His autem positis si radius lunaris orbitæ pro unitate accipiatur fiet Lunæ evectio $- 2DC$. sin. $2X - cZ$, & loco unitatis scribendo arcum 57.29578°, & pro DC scribendo $0.01172\frac{1}{2}$, fiet evectio eadem $- 1^{\circ}\ 20'\ 37''$. sin. $2X - cZ$, erit scilicet æquationis coefficiens $- 1^{\circ}\ 20'\ 37''$, argumentum $2X - cZ$.

Newtonus in eodem scholio theoriæ lunaris attigit aliam æquationem, quam secundam centri æquationem appellavit, & cujus constructio huc redit. Positis omnibus ut antea fiat angulus LDF æqualis summæ distantiarum Lunæ a Sole, & apogæi Lunæ ab apogæo Solis, accipiaturque $DF = 0.000352$. Si media Solis distantia a summa apside ut antea vocetur Y, & sit $cZ - Y$ distantia apogæi Lunæ a Sole, adeoque sit distantia summarum apsidum

Lunæ,

Lunæ, & Solis a se invicem $Y + X - cZ$, erit perpendiculum HF ex F in LD ductum $=$ DF. sin. LDF $= 0.000352$. sin.$(2X - cZ + Y)$. Juxta Newtonum concipi debet centrum lunaris orbitæ abire ex D in F, ut recta HF ad Lunam L subtendat angulum variatæ excentricitatis orbitæ, & recta eadem duplicata subtendat ad Terram angulum variatæ æquationis centri. Quare cum 0.000704 respondeat arcui 2' 25'', erit juxta Newtonum secunda æquatio centri 2' 25''. sin. $(2X - cZ + Y)$. Huic ipse æquationem aliam ibidem addidit, quam semestrem appellavit, eo quod pendeat ex angulo BCD duplæ distantiæ apogæi Lunæ a Sole: ita quidem ut sit maxima æquatio cum apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole, & nulla cum apogæum ad quadraturas Solis, vel ad syzigias defertur, addaturque eadem motui medio in transitu apogæi Lunæ a Solis quadratura ad syzigiam, & subducatur in reditu a syzigia ad quadraturam. Quantitatem maximam hujus æquationis se ex phænomenis collegisse dixit Newtonus in media quidem Solis distantia a Terra 3' 45'', in perigæo Solis 3' 56'', in apogæo autem 3' 34'', & pro quolibet Lunæ loco mediocrem æquationem hujusmodi semestrem statuit $-$ 3' 45''. sin. $(2cZ - 2X)$.

Correctis æquationum præcedentium argumentis, qua sæpe inferius utemur methodo, resolutisque terminis, minores aliæ prodibunt lunarium motuum correctiones. Omnes vero pendent ex orbitæ ellipticitate, & excentricitate. Tertia Lunæ inæqualitas, quam initio hujus libri indicavimus, & quæ proprie dicitur variatio, ex angulari Lunæ, & Solis distantia dumtaxat pendet, atque in circulari etiam orbita haberet locum. Eamdem Tycho primus omnium detexit, & ad 39' usque, aut 40' censuit ascendere. Gregorius in Propos. 39. Lib. 4. Astronomiæ Physicæ, & Geometricæ ex ipsa Newtoni theoria primam variationem Lunæ constituit 37' 25''. sin. 2X in perigæo Solis, & in apogæo 33' 4''. sin. 2X: quo posito mediocris Lunæ variatio evaderet 35' 15''. sin. 2X circiter. Primæ autem huic parti memoratæ variationis secundam $-$ 2' 20''. sin. X adjunxit Newtonus detrahendam a motu medio cum Luna a conjunctione ad oppositionem transit, addendamque in reditu ad conjunctionem, cum sin. X sit negativus. Alia etiam apud Newtonum æquatio occurrit, quæ ab excentricitate lunaris orbitæ non pendet, sed habet pro argumento duplam distantiam Lunæ a linea nodorum dempta dupla distantia Lunæ a Sole: & quidem si S denotet mediam distantiam Lunæ a nodo ascendente orbitæ juxta ipsum æquatio hujusmodi debet esse $-$ 47''. sin. $(2S - 2X)$. Videbimus suo

loco quas æquationum omnium lunarium quantitates, correctionesque observationum omnium subsidio statuerit Majerus, quasque & ipse, & Geometræ alii celeberrimi ex gravitatis legibus derivaverint. Minime vero prætereundum erat in hoc opere quibus gradibus, & quo ingenio Newtonus aliis facem in re tam difficili prætulerit.

Primæ, & secundæ huic motuum lunarium variationi, analogæ sunt, ut monuimus, inæqualitates illæ, quas in motibus Satellitum Jovialium certo detexit Wargentinus. Jam enim Bradlejus in notis ad Hallæi tabulas adnotaverat aliquam esse inæqualitatem motuum in tribus prioribus Satellitibus, & cujuscumque inæqualitatis periodum eamdem esse, qua tres Satellites ad eumdem aspectum redeunt inter se invicem, dierum scilicet 347 : quo tempore primus Satellès absolvit revolutiones 247, secundus 123, tertius 61. Wargentinus in actis Upsaliensis Academiæ anni 1741., 42., & 44. collatis omnibus observationibus inæqualitatis hujusmodi quantitatem, ac leges definivit. Summa autem totius rei apud Astronomum celeberrimum sunt capita : primum Satellitem maxime accelerari quando in umbra Jovis cum secundo Satellite simul versatur, atque ipsi propterea conjungitur, circa oppositionem vero adhuc primum Satellitem celeriorem esse quam in quadraturis: secundum Satellitem maxime retardari in conjunctionibus, & accelerari in oppositionibus cum primo : ac similiter tertii motum retardari in conjunctionibus secundi Satellitis, & in oppositionibus accelerari. Maximam differentiam medii, & veri motus in primo, ac tertio Satellite fere 7' temporis esse voluit, in secundo 34', in quarto 1ʰ 8' : ut propterea dimidium accipiendo sit $3\frac{1}{2}'$ quantitas, quæ in conjunctionibus primi Satellitis addi debet, & in quadraturis subtrahi: ac 17' sit quantitas, quæ in oppositionibus secundi Satellitis cum primo addi debet, & subtrahi in conjunctionibus. Æquatio autem $3\frac{1}{2}'$ temporis in primo Satellite respondet $29\frac{1}{2}'$ arcus: & in secundo Satellite æquatio 17' temporis respondet $1\frac{1}{2}°$ arcus. Censuit etiam Wargentinus æquationem Satellitis utriusque ex attractione mutua pendere potius quam ex orbitarum duarum excentricitate, quæ aut nulla est, aut saltem valde exigua: æquationes vero tertii, & quarti Satellitis singulis annis duodecim cum dimidio reverti dixit, & pendere potissimum ab excentricitate, & motu apsidum. Posterioribus litteris ad me datis monuit insuper Astronomus celeberrimus æquationem tertii Satellitis 30. annorum spatio sic decrevisse ut modo 2', aut $2\frac{1}{2}'$ temporis non superet :

quarti

quarti autem Satellitis æquationem 1° non minorem ſtatui oportere.

Syſtematis Jovialis conformatio ſingularis ea eſt, quod cum angulares motus tertii, ſecundi, & primi Satellitis circa Jovem ſint inter ſe quam proxime ut 1, 2, 4, conjunctis, vel oppoſitis inter ſe primo, & ſecundo Satellite tertius ſit ſemper in quadraturis: ſecundo, & tertio conjunctis primus utrique opponatur: conjunctiſque primo, & tertio opponatur pariter ſecundus. Ita igitur ſecerni nequit quæ portio æquationis ſecundi Satellitis tribui poſſit actioni primi, & quæ tertii. Collatis autem obſervationibus omnibus æquationum primi, & ſecundi Satellitis ea lex eruitur, quod ſi ſit X angularis diſtantia primi, & ſecundi Satellitis viſa e centro Jovis, æquatio primi Satellitis ſtatui debet $29\frac{1}{2}'$. ſin. 2X, & ſi diſtantia ſecundi, & tertii Satellitis vocetur X', æquatio ſecundi Satellitis ſtatui debet $\pm 1\frac{1}{3}°$. ſin. 2X', ſive etiam $\mp 1\frac{1}{3}°$. ſin. X. Primo enim angularibus motibus tertii, ſecundi, & primi Satellitis inter ſe poſitis ut 1, 2, 4, incrementum angularis diſtantiæ primi Satellitis a ſecundo æquale erit incremento diſtantiæ duplæ ſecundi Satellitis a tertio, & ubique eadem habebitur differentia angulorum X, & 2X'. Deinde quia ſecundo, & tertio Satellite inter ſe conjunctis primus utrique opponitur, atque angulorum X, & 2X' differentia eſt integri ſemicirculi; ſemper iidem anguli integrò ſemicirculo different inter ſe, ac ſinus angulorum X, & 2X' jacebunt in adverſas partes, eruntque inverſo ſigno æquales inter ſe. Fiet igitur ſin. 2X' = — ſin. X, ac motus medius ſecundi Satellitis minuetur poſt conjunctionem primi, poſt oppoſitionem autem augebitur, & maxima veri, ac medii motus differentia in prima, & ſecunda quadratura duorum Satellitum eſſe poterit $\mp 1\frac{1}{3}°$. Simili modo quia motus tertii, & quarti Satellitis non admodum recedit a ratione dupla, cenſeri poterit motum medium tertii Satellitis fere poſt conjunctionem ſecundi imminui, & augeri poſt oppoſitionem.

Clariſs. Bailly ad calcem ſuarum tabularum oſtendit quod ſi æquatio primi Satellitis habeat pro argumento duplam angularem diſtantiam ejuſdem Satellitis a ſecundo, & æquationis coefficiens ſit $29\frac{1}{2}'$, cum 97 ſelectis obſervationibus tabulas comparando error omnis plerumque eſt paucorum ſecundorum, nec niſi ſemel ad $1\frac{1}{4}'$ aſcendit. Inſuper oſtendit ipſe quod ſi æquatio ſecundi Satellitis habeat pro argumento duplam diſtantiam ſecundi a tertio, ſive diſtantiam ſimplicem ſecundi a primo, eaque demantur a motu medio in tranſitu ſecundi Satellitis a conjunctione ad oppoſitionem primi, & in reditu ad quadraturas addatur, atque in

binis quadrantibus fiat maxima, & ad $\mp 1^{\circ}\ 9'\ 42''$ usque ascendat; intra 3', aut 4' satisfiet octoginta observationibus, additque vir præclarissimus dissensum multo minorem esse si coefficiens æquationis minuatur decima sui parte, & gradum propius accedat. Æquationes omnes Lunæ, aliorumque Satellitum, & Planetarum ex generali solutione problematis trium corporum se se trahentium inferius erutas trademus. Quia vero Satellitum Jovialium, præcipue interiorum, orbitæ satis ad circulos accedunt, assumptaque hypothesi orbitæ proxime circularis tota eorumdem Satellitum theoria binis theorematis, problematisque satis accurate perstringi potest, ob methodi elegantiam, simplicitatemque visum est modo perturbationum omnium calculum ab hypothesi circularis orbitæ exordiri.

CAPUT PRIMUM.

DE VIRIBUS PERTURBATRICIBUS LUNARIS ORBITÆ.

PROBLEMA I.

DAta Solis, & Lunæ distantia a Terra, & a se invicem, neglectaque inclinatione lunaris orbitæ ad eclipticam, perturbatrices vires Solis invenire.

Sint T, L, S, fig. 36., loca Terræ, Lunæ, & Solis, atque ex L in lineam ST, quæ centra Terræ, & Solis conjungit, & quæ dicitur linea syzigiarum, ac pariter in lineam quadraturarum DT ducantur perpendicula LM, LN, jungaturque SL, atque ex S in vectorem radium TL demittatur perpendiculum aliud SK. Sint insuper quantitates materiæ in Terra, & Sole M, & 1, & sit gravitas Lunæ in Terram $\frac{M}{TL^2}$, in Solem vero $\frac{1}{SL^2}$. In primis vis hujusmodi $\frac{1}{SL^2}$, cum dirigatur ex L in S, resolvi poterit in binas alias secundum LK, SK, quarum prior gravitatem Lunæ in Terram minuet, altera Lunæ motum vectori radio perpendicularem accelerabit, aut retardabit. Cum autem sit $LK = \frac{ST.TM}{TL} - TL$, erit vis prior $\frac{LK}{SL^3} = \frac{ST.TM}{TL.SL^3} - \frac{TL}{SL^3}$: cumque etiam Terra in Solem

lem juxta TS trahatur vi $\frac{1}{ST^2}$, & juxta LK vi $\frac{TM}{TL.ST^2}$; erit vis omnis, qua Luna actione Solis a Terra distrahetur $\frac{ST.TM - TL^2}{TL.SL^3} - \frac{TM}{TL.TS^3}$. Simili modo vis alia, quæ perpendiculariter ad vectorem radium dirigitur, erit $\frac{ST.LM}{TL.SL^3} - \frac{LM}{TL.TS^3}$: atque ob $SL^2 = ST^2 + TL^2 - 2ST.TM$, si fiat $ST = a$, & $TL = x$, erit vis prior $\frac{a.TM - x^2}{x(a^2 + x^2 - 2a.TM)^{\frac{3}{2}}} - \frac{TM}{a^3.x}$,

vis altera $\frac{LM}{x}\left(\frac{a}{(a^2 + x^2 - 2a.TM)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^3}\right)$.

His positis in Newtoniana serie $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ$ &c. fiat $m = -3$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2TM}{a}$, ac fit propterea $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^3}$, $\frac{m}{n}AQ = \frac{3TM}{a^4} - \frac{3x^2}{2a^5}$, $\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{15TM^2}{2a^5}$. Ob maximam Solis distantiam præ Lunæ distantia a Terra neglectis aliis inferiorum ordinum fractionibus, erit vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita

$$\left(\frac{a.TM - x^2}{x}\right)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3TM}{a^4} - \frac{3x^2}{2a^5} + \frac{15TM^2}{2a^5}\right) - \frac{TM}{a^3x} =$$

$$-\frac{x}{a^3} + \frac{3TM^2}{a^3x} - \frac{9x.TM}{2a^4} + \frac{15TM^3}{2a^4x}:$$

& cum sit $\frac{TM^2}{x^2} = \text{cos}.\, STL^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\,\text{cos}.\,2STL$,

& $\frac{TM^3}{x^3} = \frac{3}{4}.\,\text{cos}.\,STL + \frac{1}{4}.\,\text{cos}.\,3STL$, fiet vis eadem

$$\frac{x}{2a^3} + \frac{3x}{2a^3}.\,\text{cos}.\,2STL + \frac{9x^2}{8a^4}.\,\text{cos}.\,STL + \frac{15x^2}{8a^4}.\,\text{cos}.\,3STL.$$

Simili calculo, & terminorum omnium resolutione eruetur vis perpendicularis radio vectoris lunaris orbitæ

LM

$$\frac{LM}{x}\left(\frac{3\,TM}{a^3} - \frac{3x^2}{2a^4} + \frac{15\,TM^2}{2a^4}\right) =$$

$$\frac{3x}{a^3}.\text{cos. STL. sin. STL} - \frac{3x^2}{2a^4}.\text{sin. STL} + \frac{15\,x^2}{2a^4}.\text{cos. STL}^2.\text{sin. STL} =$$

$$\frac{3x}{2a^3}.\text{sin. 2STL} + \frac{3x^2}{8a^4}.\text{sin. STL} + \frac{15\,x^2}{8a^4}.\text{sin. 3 STL}.$$

Corollarium I.

Primo igitur vis perpendicularis radio, quæ priori hujus feriei termino præcipue exprimitur, in octantibus quadraturarum fiet maxima, atque in tranfitu a priori quadratura ad fyzigiam continue Lunam accelerabit, & in progreffu ad quadraturam alteram retardabit contrariis gradibus. Deinde in quadraturis, pofito cof. $2STL = -1$, gravitas Lunæ in centrum augebitur vi $\frac{x}{a^3}$: in fyzigiis autem, ob cof. $2\,STL = 1$, minuetur vi $-\frac{2x}{a^3}$, atque in circulari orbita vis pofterior alterius dimidia erit. Quod fi infuper requiratur vis omnis, quæ parallele ad fyzigiarum lineam ST exfurgit, fimili modo eruetur $\frac{ST}{SL^3} - \frac{1}{ST^2} = \frac{3\,TM}{ST^3}$: erit fcilicet vis hujufmodi proportionalis triplæ diftantiæ Lunæ a quadraturarum linea TD.

Corollarium II.

Vis perturbatrix $\frac{TL}{ST^3}$ erit ad vim $\frac{1}{ST^2}$, quæ a Sole S exercetur in Terram T ut TL : ST. Generatim vero fi dum corpus L volvitur circa T corpus etiam T volvatur circa aliud S, & orbitæ fint proxime circulares, ac ratio periodicorum temporum L circa T, & corporis T circa S fit $n:1$, per Theor. I. fuperioris libri erit gravitas corporis T in S ad gravitatem corporis L in T ut $n^2.ST:LT$. Quare compofitis rationibus vis perturbatrix $\frac{TL}{ST^3}$ in mediocri diftantia erit ad vim $\frac{M}{TL^2}$ gravitatis corporis L in T ut $n^2:1$, & fi gravitas ipfa in mediocri eadem diftantia accipiatur loco unitatis, generatim erit vis perturbatrix $\frac{x}{a^3} = n^2x$, & vis omnis refidua cor-

corporis L in T erit $= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} n^2 x + \frac{1}{2} n^2 x . \text{cof.} 2 STL$ &c.

COROLLARIUM III.

Quia tempus periodicum Lunæ circa Terram eſt $27^d\ 7^h\ 43'$, atque eſt annus ſidereus $365^d\ 6^h\ 9'$, erit $1 : n^2 = 178725 : 1000$ ſatis proxime, & gravitas Lunæ in Terram in mediocri diſtantia erit ad vim perturbatricem $\frac{x}{a^3}$, quæ a Sole juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercetur, ut $178.725 : 1$. Prior autem vis variabitur in ratione reciproca duplicata, altera in ratione directa ſimplici diſtantiæ. Eadem etiam eruetur ratio mediocris vis gravitatis ad vim mediocrem perturbatricem in hypotheſi orbitæ ellipticæ: cum juxta Theor. VIII. libri antecedentis velocitas in ellipſi ad mediocrem diſtantiam ea ſit, qua circulus eadem vi gravitatis, & in eadem diſtantia a centro deſcribi poſſet: & juxta Coroll. IV. Theor. IX. tempora periodica in ellipſibus eadem ſint quæ in circulis ad diſtantiam mediam deſcriptis.

PROBLEMA II.

Invenire variationes earumdem virium, quæ pendent ex inclinatione lunaris orbitæ ad eclipticam, atque ex nodorum loco.

Sit in fig. 37. B*b* interſectio lunaris orbitæ BAL*b* cum plano Eclipticæ B*ab*. Erunt ut antea $\frac{1}{SL^2}$, $\frac{1}{ST^2}$ vires punctorum L, & T ſecundum SL, ST: & ſi SK ſit radio TL producto in K, & LM rectæ ST perpendicularis in puncto M, vires punctorum eorumdem ſecundum TL erunt $\frac{LK}{SL^3}$, $\frac{ST.TM}{TL.ST^3}$, atque ob $SL^2 = a^2 - 2a.TM$ quam proxime, vis perturbatrix Solis juxta vectorem radium exercita erit $\left(\frac{ST.TM}{TL} - TL\right)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3\,TM}{a^4}\right) = -\frac{x}{a^3} + \frac{3\,TM^2}{x a^3}$. Jam vero ſi ſit A*a* perpendiculum ex A demiſſum in planum B*ab*, & LN perpendiculum demiſſum ex L in lineam quadraturarum D*d*, ac ſinus totus ad ſinum inclinationis lunaris orbitæ ſe habeat ut $1 : \pi$; erit $Aa = \pi$. $AG = \pi x . \text{ſin.} ATB$, eritque TA : T*a* ut recta LN ad rectam, quæ intercipitur puncto N, & perpendiculo ex L demiſſo in planum B*ab*. Scilicet ex L demiſſo in rectam ST ut antea perpen-

pendiculo LM erit $TM = \frac{Ta}{TA} . LN = LN. \surd(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)$, atque, ob inclinationem orbitæ, recta TM minuetur in ratione $\surd(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2) : 1$. Ergo pro quolibet nodorum loco erunt priores termini vis perturbatricis juxta vectorem radium exercitæ

$$- \frac{x}{a^3} + \frac{3 LN^2}{x a^3} . (1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)$$

$$= - \frac{x}{a^3} + \frac{3x}{a^3} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{cof.} 2STL) (1 - \tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}\pi^2 . \text{cof.} 2ATB)$$

$$= \frac{x}{2a^3} (1 - \tfrac{3}{2}\pi^2 + \tfrac{3}{2}\pi^2 . \text{cof.} ATB) + \frac{3x}{2a^3} . \overline{1 - \tfrac{1}{2}\pi^2} . \text{cof.} 2STL +$$

$$\frac{3x\pi^2}{4a^3} . \text{cof.} 2STL . \text{cof.} 2STB .$$

Simili modo erunt priores termini vis alterius perpendicularis
$\frac{3TM . LM}{x a^3} = \frac{3x}{2a^3} . \overline{1 - \tfrac{1}{2}\pi^2} . \text{fin.} 2STL + \frac{3x\pi^2}{4a^3} . \text{fin.} 2STL . \text{cof.} 2ATB .$

Corollarium I.

Erit etiam $\frac{\pi}{a^2} . \text{fin.} ATB$ vis, qua punctum T trahetur perpendiculariter ad planum orbitæ BAb, & vis, qua trahetur similiter punctum L, erit $\frac{a\pi}{SL^3} . \text{fin.} ATB$: & cum fit $SL^2 = ST^2 + LT^2 - 2ST . TM$, pro TM fcribendo $TM . \surd(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)$ erit duarum virium differentia, five vis omnis, qua Luna a plano orbitæ fuæ diftrahetur actione Solis $\frac{a\pi . \text{fin.} ATB}{(a^2 + x^2 - 2a . TM . (1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi}{a^2} . \text{fin.} ATB$,
feu proxime $\frac{\pi}{a^3} . \text{fin.} ATB . 3TM . \surd(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)$.

Corollarium II.

Quo dato, fi fit LO duplum fpatii, quod viribus plano orbitæ perpendicularibus abfolvi poffet eo tempore, quo Luna arcum Ll abfolvit, fig. 37., erit finus verfus arcus Ll, five $\frac{Ll^2}{2TL}$ ad $\tfrac{1}{2}$ LO ut gravitas Lunæ in Terram ad vim ipfam perpendicularem: & fi gravitas

vitas Lunæ in Terram ut antea ſit $\frac{M}{TL^2}$, erit ſpatium idem LO $=$

$$\frac{a\pi.TL.Ll^2.\text{ſin.}ATB}{M(a^2+x^2-2a.TM.(1-\pi^2.\text{ſin.}ATB^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi.TL.Ll^2.\text{ſin.}ATB}{Ma^2},$$

ſeu proxime $\frac{3\pi}{Ma^3}.TL.Ll^2.TM.\text{ſin.}ATB.\surd(1-\pi^2.\text{ſin.}ATB^2)$.

PROBLEMA III.

Invenire variationes earumdem virium, quæ pendent ex loco Terræ in ſua orbita.

Si a non veram, ſed mediam tantum diſtantiam Terræ, & Solis deſignet, & ſit a major ſemiaxis terreſtris orbitæ, atque ad excentricitatem ſe habeat ut $1:\delta$, & ſit inſuper TSs, fig. 36., angularis diſtantia Terræ a ſumma apſide; juxta Probl. III. Lib. I. erit vera Terræ a Sole diſtantia $ST = \frac{a.(1-\delta^2)}{1-\delta.\text{coſ.}TSs}$, neglectiſque aliis minoribus fractionibus fiet $\frac{1}{ST^3} = \frac{1}{a^3}(1-3\delta.\text{coſ.}TSs)$.

Hoc poſito, & retentis omnibus, quæ in Coroll. II., & III. Probl. I. libri hujus indicata ſunt, ſi ratio temporum periodicorum Terræ circa Solem, & Lunæ circa Terram ſit $1:n$, & ſi inſuper gravitas Lunæ in Terram $\frac{M}{TL^2}$ in mediocri diſtantia accipiatur loco unitatis, ſcribendo $n^2(1-3\delta.\text{coſ.}TSs)$ loco $\frac{1}{a^3}$, & $\frac{n^2}{a}(1-4\delta.\text{coſ.}TSs)$ loco $\frac{1}{a^4}$, in priorum problematum formulis fiet vis perturbatrix Solis juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercita

$$\tfrac{1}{2}n^2x(1-\tfrac{3}{2}\pi^2)(1-3\delta.\text{coſ.}TSs)$$
$$+\tfrac{3}{2}n^2x(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)(1-3\delta.\text{coſ.}TSs).\text{coſ.}2STL$$
$$+\frac{9n^2x^2}{8a}(1-4\delta.\text{coſ.}TSs).\text{coſ.}STL+\frac{15n^2x^2}{8a}.\text{coſ.}3STL$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2x.\text{coſ.}2ATB+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2x.\text{coſ.}2ATB.\text{coſ.}2STL.$$

Simili modo eruetur vis perpendicularis radio

$$\tfrac{3}{2}n^2x(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)(1-3\delta.\text{coſ.}TSs).\text{ſin.}2STL$$
$$+\frac{3n^2x^2}{8a}(1-4\delta.\text{coſ.}TSs).\text{ſin.}STL+\frac{15n^2x^2}{8a}.\text{ſin.}3STL$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2x.\text{ſin.}2STL.\text{coſ.}2ATB.$$

Corollarium I.

Ex priori formula manifestum est gravitatem Lunæ in Terram actione Solis imminui quantitate $\frac{1}{2} n^2 x \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2\right)$, seu proxime $\frac{1}{2} n^2$, quæ cum ex loco apsidum, nodorumque, atque ex Terræ loco in sua orbita non pendeat, media vis perturbatrix appellari potest. Patet insuper quod si orbita Lunaris ad circulum proxime accedere intelligatur erit vis omnis mediocris Lunæ in Terram $1 - \frac{1}{2} n^2$: & quia circularis motus velocitas per Theor. II. Lib. I. ea est, quæ per dimidium radium cadendo constanti vi centripeta acquiri posset, juxta formulas §. IV. Introduct. erit quadratum velocitatis mediocris Lunæ $1 - \frac{1}{2} n^2$. Et quia data velocitate projectionis areæ descriptæ debent esse proportionales temporibus, patet denique pro exigua quavis orbitæ variatione quadratum velocitatis radio perpendicularis assumi posse $= \frac{1 - \frac{1}{2} n^2}{x^2}$.

Corollarium II.

Ex altera vero formula manifestum est velocitatem eamdem ob vim perturbatricem Solis, quæ perpendiculariter ad vectorem radium dirigitur, continue affici, & pro vario Solis, apsidum, nodorumque aspectu diversam fieri. Et quia præcipuus vis perpendicularis terminus est $\frac{1}{2} n^2 x . \text{fin. } 2STL$, patet velocitatem projectionis Lunæ a conjunctione ad quadraturam primam tendendo, cum vis perpendicularis in contrariam partem dirigitur, imminui, & deinde in transitu ad oppositionem augeri, & usque ad quadraturam alteram rursus imminui, augerique in reditu ad conjunctionem: citraque, & ultra quadraturarum lineam, utramque syzigiam versus, velocitatem Lunæ majorem fieri quam quæ esset in orbita circa Terram ob vim mediocrem centripetam descripta.

Problema IV.

Data vi perpendiculari ad vectorem radium in orbita, quæ accedat proxime ad circulum, variationem velocitatis Lunæ invenire.

Sit in fig. 36. LTl angulus, quo Luna a quadraturarum linea TD recedit dato elemento temporis, & sit ipse angulus $\frac{Ll}{TL} = \frac{Mm}{ML}$. Si dum Luna hujusmodi angulum describit, Sol apparenti motu describat angulum STS', angularis Lunæ recessus a quadraturis fiet minor in ratione differentiæ motuum angularium Lunæ, & Solis

lis ad motum angularem Lunæ, ſive in ratione relativi motus Lunæ a Sole ad motum abſolutum Lunæ. Patet autem revolutionum tempora eſſe in ratione reciproca motuum, ſive angulorum dato tempore circa centrum deſcriptorum. Quare ſi tempus periodicæ revolutionis Lunæ ad tempus revolutionis Lunæ ſynodicæ ſe habeat ut $1:N$, ob motus fere uniformes, hæc eadem erit ratio motus relativi Lunæ, & Solis ad motum abſolutum Lunæ: atque ut Luna angulo $\frac{Mm}{ML}$ recedat a quadraturis, deſcribere debebit angulum $N.\frac{Mm}{ML}$, & ſpatium a Luna deſcriptum perpendiculariter ad vectorem radium erit $N.\frac{TL.Mm}{ML}$. Quare ſi in priore problemate primus tantum ſumatur vis perpendicularis terminus $\frac{3\,ML.TM}{TL.a^3}$, ſive $3n^2.\frac{ML.TM}{TL}$, & velocitas Lunæ perpendicularis radio vocetur V; erit juxta priores variabilis motus formulas $V\,dV = 3n^2.N.TM.Mm$: integrandoque, & juxta Coroll. I. Probl. III. quantitatem conſtantem debite addendo fiet $V^2 = \frac{1-\frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3n^2\,N.TM^2$. Aliis vero etiam acceptis vis perpendicularis terminis eadem ratione eruetur

$$V^2 = \frac{1-\frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3n^2\,N.TM^2 - \frac{3n^2}{a}.N.TM + \frac{5n^2}{a}.N.TM^3:$$

& poſito $\frac{TM}{x} = \text{coſ.}\,STL$, reſolutiſque terminis fiet denique $V^2 =$

$$\frac{1-\frac{1}{2}n^2}{x^2} + \tfrac{3}{2}n^2Nx^2(1+\text{coſ.}2STL) + \frac{3n^2}{4a}Nx.\text{coſ.}STL + \frac{5n^2}{4a}.Nx.\text{coſ.}3STL.$$

Corollarium I.

Velocitas in quadraturis ad velocitatem in ſyzigiis ſe habebit in ratione ſubduplicata $1:1+3n^2N$, ſeu proxime in ratione ſimplici $1:1+\frac{3}{2}n^2N$. Et ſi juxta Coroll. III. Probl. I. fiat $1:n^2 = 178725:1000$, ac ſit tempus revolutionis Lunæ periodicæ $27^d\,7^h\,43'$, & tempus revolutionis ſynodicæ, quo ad eumdem aſpectum Solis revertitur, ſit $29^d\,12^h\,44'$, adeoque ſit $1:N = 1:1.080853$; erit velocitas Lunæ in quadraturis ad velocitatem in ſyzigiis ut $1:1+\frac{100}{11023}$, mediumque incrementum velocitatis erit $\frac{50}{11023}$: & ſi ve-

velocitas media exprimatur numero 100.23 fiet velocitas minima in quadraturis 109.73, aliis autem in locis erit velocitas ut summa numeri 109. 23, & quadrati ſinus diſtantiæ a quadraturis ipſis in circulo, cujus radius ſit unitas, adeoque fiet velocitas maxima in ſyzigiis 110.73.

Corollarium II.

Quia radius circuli æquatur quadrato ſubtenſæ arcus per duplum ſinum verſum diviſo, & circularem arcum minuendo differentia ſubtenſæ, & arcus fit data quacumque minor, ſi quadratum velocitatis dividatur per vim centripetam, quæ duplo ſinu verſo arcus dato tempore deſcripti exprimitur, prodibit radius circuli eamdem curvitatem habentis cum lunari orbita in loco dato

$$\frac{1 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n^2 N x^4 . (1 + \text{coſ. } 2STL)}{1 - \frac{1}{2} n^2 x^3 - \frac{3}{2} n^2 x^3 . \text{ coſ. } 2STL}$$

ſeu proxime $1 + \frac{3}{2} n^2 N + \frac{3}{2} n^2 . \overline{N + 1} . \text{ coſ. } 2STL$: ac poſito primum coſ. $2\,STL = -1$, ac deinde $= 1$, radius oſculi in quadraturis ad radium oſculi in ſyzigiis quam proxime ſe habebit ut $1 : 1 + 3 n^2 . \overline{N + 1}$.

Corollarium III.

Luna igitur utrobique in conjunctione, & oppoſitione, cum majorem velocitatem, & vim centripetam minorem habeat, minus deflectet a recto tramite quam in quadraturis Solis, & lunaris orbita in quadraturis ipſis fiet curvior : quod eſſe nequit niſi, ſecluſo motu excentricitatis, Luna in quadraturis longius a Terra recedat, quam in ſyzigiis. Et quidem cum in ellipſi differentiæ radiorum oſculatorum generatim ſint ut coſinus duplæ diſtantiæ a minore axe, atque a majore ad minorem tranſeundo radii iidem augeantur in duplicata ratione diſtantiæ ab axe eodem majore, ut patet ex elementis conicorum, neglectis variationibus ortis ex motu Solis, lunaris orbita proxime eſſet elliptica : & cum ellipſeos ſemiaxes ſint inter ſe in ratione ſubtriplicata radiorum oſculatorum, ſemiaxis major lunaris orbitæ ad minorem in eadem hypotheſi ſe haberet ut $\sqrt[3]{(1 + 3 n . \overline{N + 1})} : 1$, ſeu proxime ut 87:86.

Scholion.

Newtonus in Propoſ. XXVI. Lib. III. Princip. cum accelerationem Lunæ in circulari orbita ſupputaſſet, ob ignoratam ſpeciem curvæ, in quam cir-

circularis eadem orbita a viribus perturbatricibus transformari potest, in Propos. XXVIII. hypotheseos loco assumpsit orbitam ellipticam, & mobilem circa Terram, cujus major axis lineæ quadraturarum, minor syzigiarum lineæ respondeat. Clairaut in actis Parisiensis Academiæ anni 1743. Newtonianæ hypotheseos veritatem ex eo satis collegit quod radii osculatores lunaris orbitæ augeantur in duplicata ratione sinus distantiæ a quadraturis. Patet enim ex conicorum elementis quod si centro T, fig. 38., descripta ellipsis intelligatur, quæ transeat per puncta M, R, & cujus major axis sit Vv, minor Aa, diameter conjugata Kk, & sit MO diametro Kk, & tangenti ellipseos in puncto M, ac semiordinatæ Rm in n productæ perpendicularis, in primis erit $\frac{Rn^2}{2Mn}$, sive etiam $\frac{Rm^2}{2Mn}$ radius circuli transeuntis per puncta eadem M, R. Est autem $Rm^2 = \frac{TK^2}{TM^2} . 2TM . Mm$, & $Mm = \frac{TM}{MO} . Mn$: atque insuper, cum æqualia sint parallelogramma ellipsi circumscripta, esse debet $MO . TK = TA . TV$: ac denique cum juxta elementa conicorum quadratum semiaxis minoris æquetur rectangulo normalis MP, & perpendiculi ex centro T ducti in tangentem puncti M, erit etiam $TA^2 = MP . MO$. Quare erit radius osculi ellipseos $\frac{TK^2}{MO} = \frac{TA^2 . TV^2}{MO^3} = \frac{TV^2 . MP^3}{TA^4}$: & cum sit etiam ex natura ellipseos $HT^2 = \frac{TV^2}{TA^2}(TA^2 - MH^2)$, & subnormalis $PH = \frac{TA^2}{TV^2} . HT$, erit $MP^2 = \frac{TA^4}{TV^2} + (TV^2 - TA^2) . \frac{MH^2}{TV^2}$.

Ita igitur fiet radius osculi in vertice V axis majoris $\frac{TA^2}{TV}$, & in vertice minoris axis $\frac{TV^2}{TA}$, & si ellipsis accedat proxime ad circulum, & quantitas $\frac{TV^2 - TA^2}{TV}$ satis exigua censeri possit, reductis terminis radius osculi a majore ad minorem axem transeundo proxime augebitur in duplicata ratione sinus anguli VTM. Sed cum sit pariter

$$TM^2 = MH^2 + HT^2 = TV^2 - (TV^2 - TA^2) . \frac{MH^2}{TA^2},$$

&

& in eadem hypothesi ellipseos accedentis proxime ad circulum extracta radice sit $TM = TV - (TV - TA) . \frac{MH^2}{TA^2}$, præstabit ex posteriori hac ellipseos æquatione magis accuratam theorematis demonstrationem derivare.

CAPUT SECUNDUM.

DE CIRCULARIS ORBITÆ VARIATIONE.

THEOREMA I.

SI planum lunaris orbitæ VTA, fig. 38., circa Terram T volvi intelligatur, ut semper eadem linea TA dirigatur ad Solem; curva VMA, quam Luna in plano hujusmodi describet, accedet proxime ad ellipsim, cujus major semiaxis VT quadraturis, minor AT syzigiis respondebit.

Sit angulus post quadraturas percursus in plano mobili VTL, in plano immobili DTL, & sit LTR angulus, quo Luna in plano eodem immobili, dato elemento temporis recederet a loco L. Quia ob motum Lunæ fere uniformem anguli hujusmodi in plano immobili, & mobili simul percursi sunt inter se ut revolutio Lunæ synodica ad periodicam; si fiat $N : 1 = LTR : MTR$, radius vector TL elemento eodem temporis ob motum plani abibit in locum M, eritque MTR angulus a Luna percursus in plano mobili. Et quia juxta Problema IV. est $\frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3 n^2 N x^2 . \text{cos. } ATL^2$ quadratum absolutæ velocitatis radio vectori perpendicularis in loco L, si sit Rm parallela tangenti in puncto M, & ex M in TM ducatur perpendiculum Rr, & cosinus anguli ATM vocetur t; neglectis aliis terminis minoribus erit quadratum velocitatis in plano mobili $Rr^2 = \frac{1}{N^2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3 n^2 N x^2 t^2 \right)$: atque erit vis centripeta $2 Mm = \frac{1}{x^2} + n^2 x - 3 n^2 x t^2$. Jam vero si centro T, & semiaxibus TA, TV describatur ellipsis, quæ transeat per puncta M, R, ut in scholio superiori, erit $Rm^2 : Rr^2 = TM^2 : MO^2$, atque ob $MO = \frac{TA.TV}{TK}$, & $Mm = \frac{TM^2 . Rm^2}{2TM . TK^2}$, erit etiam $\frac{Mm}{Rr^2} = \frac{\frac{1}{2} TM^3}{TV^2 . TA^2}$,

ſeu proxime $= \frac{1}{2}\, TM^2 = \frac{1}{2}\, x^2$: nam ſi mediocris ſemidiameter vocetur 1, & ſit ſemiaxis major $TV = 1 + \omega$, minor $TA = 1 - \omega$, neglectis quadraticis differentiæ ω poteſtatibus fiet $TV^2 . TA^2 = 1$. Erit igitur

$$x^3 = N^2 \left(\frac{1 + n^2 x^3 - 3 n^2 x^3 t^2}{1 - \frac{1}{2} n^2 + 3 n^2 N x^4 t^2} \right)$$

$$= \frac{N^2}{1 - \frac{1}{2} n^2} \left(1 + n^2 x^3 - 3 n^2 x^3 t^2 \left(1 + \frac{N x}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right) \right).$$

Ex hac autem formula, novis diviſionibus, poſita $\frac{N^2}{1 - \frac{1}{2} n^2} = m^2$, eruetur

$$x^3 = m^2 + n^2 m^4 \left(1 - 3 t^2 \left(1 + \frac{N x}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right) \right)$$

$$x = m^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} n^2 m^{\frac{8}{3}} \left(1 - 3 t^2 \left(1 + \frac{N x}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right) \right)$$

$$= m^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} n^2 m^{\frac{8}{3}} \left(1 - 3 t^2 \left(1 + \frac{N m^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right) \right).$$

Itaque radius vector minuetur in duplicata ratione diſtantiæ a majore axe, & ſi major ſemiaxis TV ad differentiam majoris, ac minoris accipiatur ut $m^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} n^2 m^{\frac{8}{3}} : n^2 m^{\frac{8}{3}} \left(1 + \frac{N m^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right)$, quæ ellipſis in plano mobili duci poteſt per puncta R, M tranſibit eadem per puncta omnia lunaris orbitæ.

Corollarium I.

Patet autem ex constructione Probl. IV. quod cum Luna angulo quocumque dato recedit a quadraturis, revera deſcribit angulum majorem in ratione revolutionis ſynodicæ ad periodicam, ac ſemper angulus, qui in plano circa Terram mobili deſcribitur, eſt ad angulum, qui deſcribitur in plano immobili ut 1 : N. Quare lunaris orbita VLU, fig. 39., in plano immobili conſtruetur ſi majore axe TV, & minore TA, qui rationem propoſitam inter ſe habeant deſcribatur ellipſis VR'A, & accipiatur angulus VTR' ad angulum VTL ut 1 : N, ac fiat TR' = TL: erit enim punctum L in curva quæſita VLU.

Corollarium II.

Si ſit ut antea $1 : n^2 = 178725 : 1000$, & $N = 1.080853$, factis ſubſtitutionibus, ſemiaxis major illius ellipſeos, cujus revolutione

tione lunaris orbita poteſt conſtrui, ad differentiam majoris, & minoris ſemiaxis ſe habebit circiter ut $71\frac{1}{4} : 1$, atque erunt ſemiaxes ipſi inter ſe quam proxime ut $71 : 70$. Sed quoniam hæc ſemiaxium proportio ex generali expreſſione vectoris radii fuit eruta, in ea vero definienda quantitates quaſdam exiguas negligere oportuit, cum conſtet ſemitam in plano mobili a Luna deſcriptam eſſe ellipſim, ex proportione virium in quadraturis, & ſyzigiis agentium ſequenti methodo accuratior proportio ſemiaxium erui poterit.

PROBLEMA V.

Poſitis omnibus, quæ antea, invenire proportionem ſemiaxium.

Sit TV ſemiaxis major, & TA ſemiaxis minor ellipſeos $VR^{1}A$, & ſit VLU curva alia, quæ conſtruitur capiendo ſemper $TR^{1} = TL$, poſitis ſemper angulis VTR^{1}, VTL inter ſe ut $1 : N$, ſitque inſuper VMr arcus circuli centro T, & radio TV deſcripti, VN tangens, & TN, Tn ſecantes binæ per puncta R^{1}, & L ductæ. Quia deflexiones curvarum a tangente, ſeu curvaturæ ſunt proportionales ſinubus angulorum contactuum ad æquales radios pertinentibus, erit in vertice V differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ad curvaturam circuli, ut $MR^{1} : MN$, & curvatura circuli ad differentiam curvaturæ circuli, & orbitæ VLU ut $rn : rL$, & ob $TM = Tr$, & $TR^{1} = TL$, ac $MR^{1} = rL$, erit differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ad differentiam curvaturæ circuli, & curvæ alterius ut $rn : MN = Vr^{2} : VM^{2} = N^{2} : 1$. Quare cum orbium curvaturæ ſint reciproce ut radii oſculi, & ſit radius circuli TV, & radius in vertice V ellipſim oſculans $\frac{TA^{2}}{TV}$, & differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ſit $\frac{TV}{TA^{2}} - \frac{1}{TV} = \frac{TV^{2} - TA^{2}}{TA^{2}.TV}$, erit $\frac{TV^{2} - TA^{2}}{N^{2}.TA^{2}.TV}$ differentia curvaturæ circuli, & orbitæ VLU, addendoque curvaturam circuli $\frac{1}{TV}$ fiet curvatura orbitæ $\frac{TV^{2} - TA^{2} + N^{2}.TA^{2}}{N^{2}.TA^{2}.TV}$, & radius orbitam oſculans in vertice majoris axis erit $\frac{N^{2}.TA^{2}.TV}{TV^{2} + \overline{N^{2} - 1}.TA^{2}}$.

Quod ſi ex vertice ſemiaxis minoris egredi Lunam intelligamus, minorem ipſum ſemiaxem loco majoris ſubſtituendo ſimili modo eruetur radius oſculi in vertice minoris axis $\frac{N^{2}.TV^{2}.TA}{TA^{2} + \overline{N^{2} - 1}.TV^{2}}$. Erunt

itaque bini osculatores radii inter se ut $TA^3 + \overline{N^2 - 1}.TV^2.TA : TV^3 + \overline{N^2 - 1}.TA^2.TV$, & si fiat $TV = 1 + \omega$, ac $TA = 1 - \omega$, erit eadem radiorum ratio $1 - 3\omega + \overline{N^2 - 1}.\overline{1 + 2\omega}.\overline{1 - \omega} : 1 + 3\omega + \overline{N^2 - 1}.\overline{1 - 2\omega}.\overline{1 + \omega} = N^2.\overline{1 + \omega} - 4\omega : N^2.\overline{1 - \omega} + 4\omega = 1 : 1 + \frac{8\omega}{N^2} - 2\omega$. Cumque per Coroll. II. Probl. IV. sit etiam radiorum ratio $1 : 1 + 3n^2.\overline{N + 1}$, fiet denique $\omega = \frac{1}{2}n^2 N^2.\frac{N + 1}{4 - N^2}$.

Corollarium I.

Si numeri ut antea substituantur speciebus fiet $\omega = \frac{1}{138.8}$ quam proxime, atque hæc quantitas si addatur, atque auferatur a medioci radio lunaris orbitæ erit $1 + \omega : 1 - \omega = TV : TA = 699 : 689 = 70 : 69$, & differentia semiaxium ad majorem semiaxem lunaris orbitæ se habebit ut $1 : 70$. Hæc autem approximatio accuratior etiam censeri poterit, quia si in Coroll. II. Probl. IV. quantitatum etiam inferioris ordinis habeatur ratio, adhuc emergit eadem proportio radiorum lunarem orbitam osculantium in syzigiis, & quadraturis.

Corollarium II.

Si tempora revolutionis Lunæ synodicæ, & periodicæ ut antea sint N, & 1, ac tempus revolutionis Solis circa Terram vocetur T, & sit D differentia temporum revolutionis Solis, & Lunæ, erit $1 : N = D : T$, & $n^2 = \frac{1}{T^2}$, ac $n^2 N^2 = \frac{1}{D^2}$; adeoque fiet $\omega = \frac{1}{2}.\frac{1}{D^2}.\frac{N + 1}{4 - \frac{T^2}{D^2}} = \frac{1}{2}.\frac{N + 1}{4D^2 - T^2}$: scilicet differentia semiaxium lunaris orbitæ ad semisummam, sive ad mediocrem Lunæ a Terra distantiam se habebit ut $\frac{1}{2}\overline{N + 1} : 4D^2 - T^2$.

Corollarium III.

Pariter quia tempus revolutionis Lunæ periodicæ ad tempus revolutionis synodicæ se habet ut differentia angularium motuum Lunæ, &

 So-

Solis ad motum angularem Lunæ, five ut motus relativus Lunæ a Sole ad abſolutum, erit $1 : N = 1 - n : 1$, & fiet $\frac{N^2}{4 - N^2} = \frac{1}{4(1-n)^2 - 1} = \frac{-1}{1-(2-2n)^2}$, eritque $a = \frac{-\frac{1}{2}n^2\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}{1-(2-2n)^2}$: quam eamdem formulam inferius ex generali etiam ſolutione Problematis eruemus.

THEOREMA II.

Accuratius vero deſcribi poterit lunaris orbita ſi ellipſis eadem VAva, fig. 40., parallele ad minorem axem Aa tranſpoſita in locum VBvb tranſeat.

Nam ſi alius inſuper ſupputetur terminus illius ſeriei, quæ vim perturbatricem Solis deſignat, & coſinus anguli ATM ut antea vocetur s, fiet juxta Probl. I. vis omnis Lunæ ſecundum vectorem radium TM $= \frac{1}{x^2} + n^2 x - 3n^2 x s^2 - \frac{9n^2 x^2 s}{8a}$: & juxta Probl. IV. fiet quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis $= \frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3n^2 N x^2 s^2 + \frac{3n^2 N x s}{4a}$: ſcilicet vis centrifuga augebitur quantitate exigua $\frac{3n^2 N s}{4a}$, & vis centripeta quantitate $\frac{9n^2 s}{8a}$ minuetur. Hoc dato manifeſtum eſt quod cum coſinus anguli ATM, ſeu ſin. VTM citra quadraturarum lineam, & verſus conjunctionis plagam ſit poſitivus, atque ex adverſa parte orbitæ oppoſitionem verſus fiat negativus; quantum ob hanc variationem virium accedet Luna, aut recedet a centro ex parte una orbitæ ellipticæ, tantumdem contrario ſenſu recedet, vel accedet ex parte altera, & diſtantia TV a centro T in quadraturis manebit eadem. Manifeſtum eſt inſuper quod cum vis omnis $\frac{3n^2}{4a} . \overline{N + \frac{1}{2}} .$ coſ. ATM exigua ſit, ſpatium etiam exiguum Mm, quo Luna a perimetro ellipſeos recedet in puncto M, ſaltem quam proxime proportionale erit coſinui anguli ATM, & ſi ſit AB tota deflexio in puncto A, ſtatui poterit Mm = AB . coſ. ATM. Hoc dato, ſi ſit NMn perpendicularis axi Vv, ob ſimilitudinem triangulorum Mmn, MNT, erit quam proxime

xime $Mn = \frac{Mm}{\text{fin.}NTM} = AB$: fcilicet orbita $VBvb$ erit ellipfis eadem $VAva$ parallele ad minorem axem Aa tranfpofita.

Corollarium.

Ita igitur circularis orbita actione virium perturbatricium abibit in aliam orbitam, quæ ellipfeos tranfpofitione, & revolutione conftruetur fatis accurate: nimirum orbita in plano mobili defcripta, quod circa Terram eumdem angularem motum cum Sole communem habeat, erit ellipfis tranfpofita, cujus minor axis ad Solem dirigetur, major cum linea quadraturarum congruet: in fpatio autem immobili veftigium femitæ habebitur vectorem quemcumque radium ellipfeos tranfpofitæ ad eum angulum traducendo in fpatio immobili, qui ad angulum in plano mobili defcriptum fit in ratione temporis revolutionis Lunæ fynodicæ ad periodicam.

Problema VI.

Iifdem pofitis differentiam diftantiæ a centro in ellipfi tranfpofita invenire.

Quia ob portionem illam virium perturbatricium, quæ eft in ratione fimplici cofinus diftantiæ Lunæ a Sole, lunaris orbita parallele ad conjunctionis lineam tranfponi debet, ob alteram vero partem, quæ eft in ratione eadem duplicata, circularis in ellipticam orbita abire debet, vires autem omnes hujufmodi exiguæ funt; neglecta variatione tranfpofitionis, quæ ex ellipticitate orbitæ oriri poffet, ftatui poterit pari intervallo & circularem, & ellipticam orbitam tranfponi. Sit igitur in fig. 40., & 41. $AB = TC = \pi$, & BRH arcus circuli centro C, & tangente Bb defcriptus, & fit infuper BTR elementum angularis motus in plano mobili, in fpatio immobili BTH, accipiendoque $TR = TL$ fit L veftigium femitæ BL defcriptæ in fpatio immobili. Si ex puncto R in fyzigiarum lineam TB ducatur perpendiculum RN, erit $BN = \frac{BR^2}{2CB}$, $CN = CB - \frac{BR^2}{2CB}$, & $TR = \sqrt{(CR^2 + TC^2 + 2TC.CN)} = CR + TC - \frac{TC.BR^2}{2CR^2}$ quam proxime. Erit etiam quam proxime $BH = N.BR$, ac fimili modo fiet $TH = CR + TC - \frac{TC.N^2.BR^2}{2CR^2}$, ac $TR - TH = LH = \frac{\pi.\overline{N^2 - 1}.BR^2}{2CR^2}$. Quare cum fit $Hb = \frac{BH^2}{2CH} = \frac{N^2.BR^2}{2CR}$,

erit curvatura circuli ad differentiam curvaturæ circuli, & orbitæ BL, five erit radius circuli ad differentiam radii osculatoris orbitæ ut CR : $\varpi . \frac{N^2 - 1}{N^2}$, seu proxime ut $1 : \varpi . \frac{N^2 - 1}{N^2}$. At quia radius osculi est ut quadratum velocitatis perpendicularis directe, & reciproce ut vis centripeta, hæc eadem debet esse ratio $1 : \frac{3n^2}{4a} . \overline{N + \frac{1}{2}}$.

Itaque exæquatis terminis fiet $\varpi = \frac{3n^2 . (N^3 + \frac{1}{2}N^2)}{4a . (N^2 - 1)}$.

Corollarium I.

Cum sit $N = \frac{1}{1 - n}$, substitutione facta prodibit $\varpi =$

$$\frac{3n^2}{4a} . \frac{N + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{N^2}} = \frac{3n^2}{4a} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-n} \right)}{1 - (1 - n)^2},$$

quam pariter formulam suo loco ex generali solutione problematis eruemus. Et si ut antea sit parallaxis mediocris Solis $9''$, ac fiat propterea $\frac{1}{a} = \frac{9''}{3438''} = \frac{1}{382}$, substitutis numeris aliis prodibit $\varpi = \frac{1}{4941}$ circiter, atque universim fiet differentia vectoris radii, quæ ex transpositione orbitæ orietur, $\frac{1}{4941}$. cos. ATM.

Corollarium II.

Jam vero si in ellipsi VAva, fig. 40., fiat TV $= 1 + \omega$, TA $= 1 - \omega$, erit TM $= 1 - \omega + 2\omega$. sin. ATM$^2 = 1 - \omega$. cos. 2ATM. Differentiis itaque simul junctis, quæ ex ellipticitate, & transpositione orbitæ oriuntur, si radius mediocris orbitæ accipiatur pro unitate, fiet radius quicumque vector T$m = 1 - \omega$. cos. 2ATM $+ \varpi$. cos. ATM $= 1 - \frac{1}{138.8}$. cos. 2ATM $+ \frac{1}{4941}$. cos. ATM.

Problema VII.

Definire motuum lunarium æquationes, quæ ex iisdem variationibus orbitæ proxime circularis oriri possunt.

Si angularis Lunæ motus sit z, dz elementum anguli descri-

pti

pti circa Terram, radius vector x, & V velocitas eidem radio perpendicularis; erit $x\,dz$ elementum arcus radio x deſcripti, & elementum temporis $\frac{x\,dz}{V}$. Quod ſi inſuper $1:n$ ſit ratio angularium motuum Lunæ, & Solis, ac ſit motus Solis nz, & motus Lunæ a Sole $z-nz$, valorem radii x ex corollario poſteriori, expreſſionemque velocitatis V ex Probl. IV. accipiendo, neglectis aliis minoribus fractionibus fiet elementum temporis

$$x^2 dz : \left(1-\tfrac{1}{4}n^2+\tfrac{3}{4}n^2 N+\tfrac{1}{4}n^2 N.\mathrm{cos.}(2-2n).z+\frac{3n^2 N}{8a}.\mathrm{cos.}(1-n).z\right)$$

$$=\frac{dz-2\omega\,dz.\mathrm{cos.}(2-2n).z+2\omega\,dz.\mathrm{cos.}(1-n).z}{1-\tfrac{1}{4}n^2+\tfrac{3}{4}n^2 N(1+\mathrm{cos.}2z-2nz)+\frac{3n^2 N}{8a}.\mathrm{cos.}z-nz}.$$

Quia igitur motus medius eſt tempori proportionalis, & ſumma motuum omnium mediorum eamdem veri motus quantitatem debet conficere, ſi elementum medii motus Lunæ ſit dZ, erit

$$dZ=dz-(2\omega+\tfrac{3}{4}n^2 N).dz.\mathrm{cos.}(2-2n).z$$
$$+\left(2\omega-\frac{3n^2 N}{8a}\right).dz.\mathrm{cos.}(1-n).z:$$

& more ſolito integrando, ac coefficientem utriuſque termini per coefficientem anguli variabilis dividendo, poſito $\frac{1}{1-n}=N$, eruetur

$$z=Z+(\omega N+\tfrac{3}{8}n^2 N).\mathrm{sin.}(2-2n).z-\left(2\omega N-\frac{3n^2 N^2}{8a}\right).\mathrm{sin.}(1-n).z.$$

COROLLARIUM I.

Cum ſit $\mathrm{sin.}(2z-2nz)=2.\mathrm{sin.}(z-nz).\mathrm{cos.}(z-nz)$, ſi tangens anguli $z-nz$ diſtantiæ Lunæ a Sole vocetur T, ac ſit propterea $T=\frac{\mathrm{sin.}z-nz}{\mathrm{cos.}z-nz}$, & $T^2-T^2.\mathrm{sin.}(z-nz)^2=\mathrm{sin.}(z-nz)^2$, ſive $\mathrm{sin.}(z-nz)=\frac{T}{\sqrt{(1+T^2)}}$, & $\mathrm{cos.}(z-nz)=\frac{1}{\sqrt{(1+T^2)}}$, fiet prior æquatio motus Lunæ $-(2\omega+\tfrac{3}{4}n^2 N).\frac{NT}{1+T^2}$: ſcilicet ob parvitatem quantitatis $2\omega+\tfrac{3}{4}n^2 N$, juxta Lem. III. libri antecedentis, æquatio hujuſmodi erit proxime ut productum temporis

poris synodici Lunæ N in tangentem differentiæ anguli $z - nz$, & anguli cujus tangens sit $T + 2\omega T + \frac{1}{4} n^2 NT$.

COROLLARIUM. II.

Si valores quantitatum ω, n, N, ϖ, $\frac{1}{a}$ accipiantur ut in corollariis problematum præcedentium, atque unitatis loco substituamus arcum 57.29578°, subductis numeris prodibit

$$z = Z + 35' \, 12''. \text{sin.}(2 - 2n).z - 1' \, 29''. \text{sin.}(1 - n).z:$$

scilicet prior æquatio fiet maxima in octantibus, & in transitu Lunæ a syzigiis ad quadraturas cum Sole motui medio Lunæ addenda erit, atque in reditu a quadraturis ad syzigias subducenda ut motus verus habeatur: altera vero æquatio fiet maxima in quadraturis, & contraria ratione in Lunæ transitu a conjunctione ad oppositionem motui medio detrahenda erit, atque in reditu ad conjunctionem addenda.

COROLLARIUM III.

Cum autem variationes hujusmodi vi Solis mediocri genitæ variari debeant in ipsa ratione virium perturbatricium, sive in triplicata ratione distantiæ Solis reciproce, si $1:m$ sit ratio medii motus Lunæ ad motum Terræ ab aphelio, juxta Probl. III. loco n^2 scribendo $n^2(1 - 3\delta.\text{cos.}\,mz)$, statuendoque $\delta = 0.0168$, resoluto de more termino $\text{sin.}(2z - 2nz).\text{cos.}\,mz$, præter variationem mediocrem $35' \, 12''. \text{sin.}(2 - 2n).z$ binas æquationes alias habebimus $-53''. \text{sin.}(2 - 2n + m).z - 53''. \text{sin.}(2 - 2n - m).z$. Quod si denique loco z ut in Probl. VI. lib. I. scribamus $Z - \frac{2\varrho}{c}.\text{sin.}\,cZ$, & sit dupla Lunæ a Sole distantia $2Z - 2nZ - \frac{4\varrho}{c}.\text{sin.}\,cZ$, ope Lem. II. resoluto sinu ipsius distantiæ, & posito $\frac{\varrho}{c} = 0.055$, erit prior variatio $35' \, 12''. \text{sin.}(2 - 2n).Z$, & binæ aliæ habebuntur variationis ipsius æquationes $-3' \, 52''. \text{sin.}(2 - 2n + c).Z + 3' \, 52''. \text{sin.}(2 - 2n - c).Z$.

SCHOLION.

Sex his prioribus motuum lunarium æquationibus facile æquatio annua adjungi posset. Nam si sit 1 radius circuli circa Terram medio-

mediocri vi centripeta $1-\frac{1}{2}n^2$ descripti, si loco n^2 scribamus $n^2(1-3\delta.\cos.mz)$, & vis centripeta augeatur in ratione $1+\frac{3}{2}n^2\delta.\cos.mz:1$ quam proxime, per Coroll. I. Theor. I. Lib. I. radius vector minuetur in ratione eadem reciproce. Et quia angulares motus sunt inter se in ratione reciproca duplicata radiorum, motus angularis Lunæ in mediocri Solis distantia ad angularem motum in distantia alia qualibet se habebit ut $1:1+3n^2\delta.\cos.mz$. Quare cum sit dz motus angularis Lunæ, erit altera ipsius motus variatio $3n^2\delta.\cos.mz.dz$: & cum ob lentissimum aphelii motum assumi possit $m=n$, summam variationum omnium accipiendo prodibit æquatio annua $3n\delta.\sin.mz$: ac denique posito $\delta=0.0168$, & $n=0.0748$, fiet omnis hujusmodi æquatio $12'\,58''.\sin.mz$. Pariter si sit ut antea motus Solis nz, motus nodi lunaris orbitæ pz, & quia motus nodi fit contra signorum ordinem, ut mox videbimus, sit motus Solis a nodo $nz+pz$, juxta Probl. II., & III. loco vis mediocris $1\frac{1}{2}n^2$ scribendo $1-\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{4}n^2\pi^2.\cos.(2n+2np).z$, & summis variationum omnium medii motus inde ortarum acceptis, æquatio altera habebitur pendens ex loco nodi, eaque erit

$$-\frac{3n^2\pi^2}{4n+4p}.\sin.(2n+2p).z,\ \text{seu proxime}\ -\tfrac{3}{4}n\pi^2.\sin.(2n+2p).z,$$

vel etiam $-1'\,32''.\sin.(2n+2p).z$, si scilicet inclinatio lunaris orbitæ ad planum eclipticæ assumatur $5^\circ\,9'\,8''$, & sit $\pi=0.0898$. His aliæ etiam æquationes, correctionesque adjungi possent. Quod si methodo aliqua consimili facile demonstrari posset theorema, quo libri hujus initio variationem excentricitatis, & evectionem Lunæ supputari posse indicavimus, & quod Newtonus videtur ex observationibus dumtaxat collegisse, facilis, & expedita jam haberetur præcipuarum Lunæ inæqualitatum theoria. Quia vero approximationes omnes, quæ citra generalem solutionem problematis trium corporum hacce in re afferri possunt, non satis videntur accuratæ, post priores illas circularis orbitæ variationes ope ellipseos revolutæ, & transpositæ non ineleganter exhibitas, satis hic erit eadem theoremata a Luna ad Satellites Jovis traducere. Licet enim, ob quantitatem excentricitatis theoremata in lunari orbita tantum quam proxime vera sint, in Satellitibus tamen Jovialibus sunt fere accurate vera, & pro supputandis æquationibus empiricis sufficiunt. Illud etiam in Joviali systemate singulare est quod orbita Satellitum inferiorum revolutione ellipseos concentricæ, atque orbita superiorum revolutione circuli transpositi satis proxime construatur, & illic quidem orbitæ transpositio, hic vero ellipticas possit negligi, ut mox videbimus.

CA-

CAPUT TERTIUM.

DE INFERIORUM SATELLITUM ÆQUATIONIBUS.

Problema VIII.

Invenire vires acceleratrices, quibus Planetæ inferiores juxta vectores radios perturbantur a superioribus.

Si in fig. 36. fiat TL $= b$, & TM $= t$, ac sit t cosinus anguli STL in circulo radii b, juxta priorem formulam libri hujus erit $\frac{at - b^2}{b(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{ba^2}$ tota vis perturbatrix, quæ juxta vectorem radium Planetæ L exercebitur. Hoc ipso si superior statuatur Planeta S, & sit a major quam b, & fractio eadem ita in seriem evolvatur ut quintæ etiam potestates supputentur quantitatem b, & t quomodocumque mixtarum inter se, posita $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^3}$, & continuata serie prioris problematis erit

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{3t}{a^4} - \frac{3b^2}{2a^5}$$

$$\frac{m-n}{2n} RQ = \frac{15t^2}{2a^5} - \frac{15b^2t}{2a^6} + \frac{15b^4}{8a^7}$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{35t^3}{2a^6} - \frac{105b^2t^2}{4a^7} + \frac{105b^4t}{8a^8}$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{315t^4}{8a^7} - \frac{315b^2t^3}{4a^8}$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = \frac{693t^5}{8a^8}.$$

His autem terminis omnibus in $\frac{at}{b} - b$ ductis habebimus

$$\frac{1}{ba^3}(3t^2 - b^2)$$

$$+ \frac{1}{2ba^4}(15t^3 - 9b^2t)$$

$+$

$$+\frac{1}{2ba^5}(35t^4-30b^2t^2+3b^4)$$

$$+\frac{1}{8ba^6}(315t^5-350b^2t^3+75b^4t)$$

$$+\frac{1}{8ba^7}(695t^6-945b^2t^4+315b^4t^2-15b^6).$$

Quare pro variis poteſtatibus quantitatis $\frac{t}{b}$, ſeu coſinus anguli STL, juxta formulas priorum lemmatum ſubſtituantur coſinus angulorum multiplorum, ordinatis terminis, fiet tota vis perturbatrix

$$\frac{b}{2a^3}\left(1+\frac{9b^2}{8a^2}+\frac{75b^4}{64a^4}\right)$$

$$+\frac{b^2}{8a^4}\left(9+\frac{75b^2}{8a^2}\right).\text{ coſ. STL}$$

$$+\frac{b}{2a^3}\left(3+\frac{5b^2}{2a^2}+\frac{315b^4}{128a^4}\right).\text{ coſ. 2STL}$$

$$+\frac{15b^2}{8a^4}.\text{ coſ. 3STL}.$$

COROLLARIUM.

Si maſſæ corporum T, & S ſint inter ſe ut M : 1; & radius mediocris orbitæ Planetæ L accipiatur loco unitatis, & in medio- cri ipſa diſtantia unitate exprimatur etiam gravitas in centrum T, atque univerſim gravitas Planetæ inferioris ſit $\frac{1}{b^2}$; neglectis minoribus fractionibus erit vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita

$$\frac{1}{2Ma^3}\left(1+\frac{9}{8a^2}+\frac{75}{64a^4}\right)$$

$$+\frac{1}{8Ma^4}\left(9+\frac{75}{8a^2}\right).\text{ coſ. 2STL}$$

$$+\frac{1}{2Ma^3}\left(3+\frac{5}{2a^2}+\frac{315}{128a^4}\right).\text{ coſ. STL}$$

$$+\frac{15}{8Ma^4}.\text{ coſ. 3 STL}.$$

PROBLEMA IX.

Invenire variationem velocitatis Planetarum inferiorum, quæ ex ſuperiorum actione oritur..

Reſoluta ſimiliter fractione erit vis perpendicularis radio vectori inferioris orbitæ $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a^2}\right)=$

$$\frac{LM.}{b}\left(\frac{3t}{a^3}-\frac{3b^2}{2a^4}+\frac{15t^2}{2a^4}-\frac{15b^2t}{2a^5}+\frac{35t^3}{2a^5}+\frac{15b^4}{8a^6}-\right.$$
$$\left.\frac{105b^2t^2}{4a^6}+\frac{315t^4}{8a^6}+\frac{105b^4t}{8a^7}-\frac{315b^2t^3}{4a^7}+\frac{693t^5}{8a^7}\right)=$$
$$\frac{3b^2}{8a^4}\left(1+\frac{5b^2}{8a^2}\right).\,\text{ſin. STL}$$
$$+\frac{b}{2a^3}\left(3+\frac{5b^2}{4a^2}+\frac{105b^4}{128a^4}\right).\,\text{ſin. 2 STL}$$
$$+\frac{15b^2}{8a^4}.\,\text{ſin. 3 STL},$$

& ſi gravitas in mediocri diſtantia accipiatur pro unitate, juxta corollarium poſterius, vis eadem erit

$$\frac{3}{8Ma^4}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\,\text{ſin. STL}$$
$$+\frac{1}{2Ma^3}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\,\text{ſin. 2STL}$$
$$+\frac{15}{8Ma^4}.\,\text{ſin. 3 STL}.$$

Sit igitur $1:N$ ratio periodici temporis Planetæ inferioris ad tempus illud, quo ad eumdem cum ſuperiore aſpectum revertitur, & velocitas radio perpendicularis vocetur V. Quia vis acceleratrix ducta in elementum ſpatii æquatur velocitati ductæ in elementum ſuum, ſi ſinguli vis perturbatricis termini ducantur in $N.Ll$, & ſummæ omnium accipiantur, addita conſtanti quantitate C, erit

$$V^2=C+\frac{3N}{4Ma^4}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\,\text{coſ. STL}$$
$$+\frac{N}{2Ma^3}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\,\text{coſ. 2 STL}$$
$$+\frac{5N}{4Ma^4}.\,\text{coſ. 3 STL}.$$

Co-

COROLLARIUM.

Si orbitæ ſint proxime circulares, qui caſus in duobus intimis Satellitibus Jovis, atque in orbita Veneris locum habet, poſito $C = 1$, & quadratum velocitatis dividendo per totam vim centripetam, fiet radius oſculi in puncto quolibet illius curvæ, in quam circularis orbita ob vires perturbatrices abire debet

$$1 + \frac{1}{2Ma^3}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right)$$
$$+ \frac{3}{4Ma^4}\left(\tfrac{1}{2} + N + \frac{5}{8a^2}\cdot\overline{\tfrac{5}{2} + N}\right)\cdot \text{coſ.}\,STL$$
$$+ \frac{1}{2Ma^3}\left(3\cdot\overline{1 + N} + \frac{5}{2a^2}\cdot\overline{1 + \tfrac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}\cdot\overline{1 + \tfrac{1}{3}N}\right)\cdot \text{coſ.}\,2STL.$$

THEOREMA III.

Si planum aliquod circa centrum T, fig. 39., feratur eodem angulari motu, quo Planeta ſuperior volvitur, inferioris Planetæ orbita in plano ipſo accedet proxime ad ellipſim, cujus major axis quadraturarum lineæ reſpondeat, & quæ parallele ad minorem axem tranſponatur: dato autem puncto R' in plano mobili, locus Planetæ L in ſpatio immobili proxime habebitur capiendo $TR' = TL$, ac poſitis angulis VTR', & VTL inter ſe ut $1:N$.

Nam ſi ille tantum ſpectetur perturbatricium virium terminus, cujus argumentum eſt duplus angulus STL, fig. 36., a quadraturis ad conjunctionem tranſeundo, juxta ſuperius corollarium, fiet incrementum oſculatoris radii

$$\frac{1}{2Ma^3}\left(3\cdot\overline{1 + N} + \frac{5}{2a^2}\cdot\overline{1 + \tfrac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}\cdot\overline{1 + \tfrac{1}{3}N}\right)\cdot \text{coſ.}\,2STL.$$

Quare ſi ſuperior Planeta in dato ſemper maneret loco, differentiæ radiorum oſculatorum orbitæ a Planeta inferiori in plano immobili deſcriptæ proportionales eſſent coſinui duplæ diſtantiæ Planetæ utriuſque, & toti oſculatores radii augerentur in duplicata ratione coſinus diſtantiæ ejuſdem, ſive in ratione duplicata ſinus diſtantiæ Planetæ inferioris a quadraturis: quod juxta elementa conicorum locum haberet in ellipſi, cujus centrum ſit T, & major axis quadraturarum lineæ reſpondeat. At quia alio etiam termino aſſumpto vis centripeta minor ſit quantitate

$\frac{1}{Ma^4}\left(\frac{9}{8}+\frac{75}{64a^2}\right)$.cof.STL, & vis centrifuga debet effe major quantitate $\frac{3N}{4Ma^4}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right)$. cof. STL, & citra, atque ultra quadraturarum lineam contrarius eft valor cof. STL; manente eodem vectore radio in quadraturis, differentia ipfius radii in locis aliis, faltem quam proxime, erit ut differentia virium perturbatricium, five ut cof. STL: quod juxta Theor. II. libri hujus in ellipfi parallele ad minorem axem tranfpofita haberet locum. Quod fi etiam Planetam fuperiorem in orbe fuo circa idem centrum volvi intelligamus, tranfpofita eadem ellipfis defcribetur in plano mobili, & femita VLU, fig. 39., in plano immobili percurfa conftrui poterit capiendo femper angulum VTR' ad VTL in fimplici ratione differentiæ motuum angularium Planetæ utriufque ad inferioris Planetæ motum, five in ratione 1 : N, & radios TR', TL ftatuendo inter fe æquales.

Corollarium.

Quia tempus periodicum primi Jovis Satellitis eft $1^d\ 18^h\ 27^l$, fecundi vero $3^d\ 13^h\ 13^l$, adeoque relativus motus duorum Satellitum ad motum abfolutum primi fe habet ut $2566:5113=1:1.9926$; erit quam proxime $N=2$, & compofitis Jovis, & fecundi Satellitis actionibus orbita a priori Satellite in fpatio immobili percurfa tranfpofitione, & revolutione ellipfeos fic defcribetur ut major, ac minor femiaxis fere in directum jaceant. Contra fi requirantur perturbationes Veneris, quæ ex Jovis actione oriri poffunt, ob tarditatem motus Jovis, orbita in fpatio immobili defcripta ita ad ellipfim tranfpofitam accedet, ut femiaxes bini fere fe interfecent ad rectos angulos.

Problema X.

Iifdem pofitis differentiam femiaxium invenire.

Quia ob parvitatem virium perturbatricium in fupputanda unaquaque femiaxium differentia, & quæ ex ellipticitate, & quæ ex tranfpofitione orbitæ ortum ducit, negligi poffunt variationes exiguæ, quæ ex altera proficifcuntur, & fingillatim utraque inquiri poteft; mediocris ellipfeos radius vocetur 1, & fit ω differentia majoris, aut minoris femiaxis, & juxta Probl. V. ellipfi circa centrum revoluta radius ofculi in quadraturis ad radium ofculi in fyzigiis Planetæ fuperioris fe habeat ut $1:1+2\omega.\frac{4-N^2}{N^2}$. Si in corol-

rollario Problematis antecedentis posterior dumtaxat terminus accipiatur, & fiat primum ang. STL $= 90°$, & cos. $2\,STL = -1$, ac deinde ang. $STL = 0$, & cos. $2\,STL = 1$, pro ratione eadem radiorum Planetæ inferioris orbitam osculantium in quadraturis, & syzigiis habebimus

$1 : 1 + \frac{1}{Ma^3}\left(3.\overline{1+N} + \frac{5}{2a^2}.\overline{1+\frac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}.\overline{1+\frac{1}{3}N}\right)$. Erit itaque

$$\omega = \frac{N^2}{2Ma^3.\overline{4-N^2}}\left(3.\overline{1+N} + \frac{5}{2a^4}.\overline{1+\frac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}.\overline{1+\frac{1}{3}N}\right).$$

Quod si vero alius etiam corollarii ejusdem terminus assumatur, erit circuli radius ad differentiam illam radii osculatoris, quæ ex transpositione orbitæ circa centrum revolutæ in spatio immobili orietur ut $1 : \frac{3}{4Ma^3}\left(\frac{3}{2} + N + \frac{5}{8a^2}.\overline{\frac{5}{2}+N}\right)$. Quare si sit ϖ quantitas, qua prior orbita parallele ad syzigiarum lineam transponitur, cum juxta Probl. VI. ratio etiam hujusmodi esse debeat $1 : \varpi.\frac{N^2-1}{N^2}$, exæquatis rationibus prodibit

$$\varpi = \frac{3N^2}{4Ma^4.\overline{N^2-1}}\left(\frac{3}{2} + N + \frac{5}{8a^2}.\overline{\frac{5}{2}+N}\right).$$

Corollarium I.

Orbita igitur Satellitis uniuscujusque inferioris in curvam aliam superioris Satellitis actione oblongabitur, quæ transpositione, & revolutione ellipseos construi poterit, ut de lunari etiam orbita dictum est. Quia vero ratio revolutionis synodicæ, & periodicæ ad duplam proxime accedit, & $4 - N^2$ fractio est exigua, prior semiaxium variatio, quæ ex ellipticitate orbitæ orietur, longe erit major, quam quæ ex ellipseos transpositione oriri posset. Neglecta igitur variatione hac posteriore, orbita inferioris cujusque Satellitis satis accurate construetur in ellipsi Jovi concentrica angularem distantiam vectoris radii a linea quadraturarum, quæ major axis est, augendo in ratione revolutionis synodicæ ad periodicam.

Corollarium II.

Si requirantur variationes orbitæ interioris Satellitis, quæ ex secundi actione oriuntur, & sit ut antea $N = 1.9926$, & $4 - N^2 = 0.029545$, ac ratio massarum Jovis, & secundi Satellitis sit $M : 1$, quia

quia primi, & secundi Satellitis distantiæ a centro Jovis sunt inter se ut $5667:9017 = 0.6285:1$; scribendo 0.6285 loco $\frac{1}{a}$, & speciebus aliis in numeros conversis prodibit prior semidifferentia semiaxium $\omega = \frac{193.97}{M}$. Quod si alia etiam quæratur semidifferentia, quæ inferiori orbita versus conjunctionis plagam transposita haberi posset, fiet proxime $\varpi = \frac{1}{Ma^{2}}\left(\frac{7}{2} + \frac{45}{16a^{2}}\right) = \frac{0.7176}{M} = \frac{1}{270}.\omega$.

COROLLARIUM III.

Pariter quia mediocres distantiæ secundi, & tertii Satellitis sunt inter se ut $9017:14384 = 0.62687:1$, & periodicum tempus tertii est $7^{d}\,3^{h}\,42'$, adeoque est tempus periodicum secundi ad synodicum tempus respectu tertii ut $5189:10302 = 1:1.9853$, scribendo 1.9853 loco N, & 0.0586 loco $4 - N^{2}$, pro secundo eodem Satellite prodibit $\omega = \frac{95.55}{M}$, & adhuc erit quam proxime $\varpi = \frac{0.7}{M}$. Denique cum in tertio, & quarto Satellite sit distantiarum ratio $14384:25299$, & sit periodicum tempus quarti $16^{d}\,16^{h}\,32'$, sive $24032'$, & in tertio Satellite sit $1:N = 13730:24032 = 1:1.75$, fiet proxime $\omega = \frac{3}{M}$, & $\varpi = \frac{0.45}{M}$.

COROLLARIUM IV.

Simili modo si requiratur semidifferentia semiaxium illius curvæ, in quam orbita Jovis abiret Saturni actione, & juxta Coroll. II. Probl. II. Lib. I. quantitates materiæ in Sole, & Saturno sint inter se ut $1:0.000331$, distantiæ autem mediocres Saturni, Jovisque a Sole sint ut $95302:51980 = 1:0.5454 = a:1$, atque insuper periodica tempora sint inter se ut $10759.275:4332.514 = 1:0.4027 = 1:n$; erit etiam $1 - n:1 = 1:N = 0.5973:1$, ac numeris omnibus subductis prodibit $\omega = 0.00061$, & $\varpi = 0.000135$, neque amplius transpositionis quantitas præ differentia semiaxium orbitæ ellipticæ negligi poterit.

COROLLARIUM V.

Denique si quæratur semidifferentia consimilis semiaxium orbitæ

tæ Martis, quæ gigni poſſet actione Jovis, & ſit Jovis maſſa 0.000937, ac diſtantiarum ratio 1 : 0.2925, & ſit relativus Planetæ utriuſque motus ad motum abſolutum Martis ut 5 : 6 = 1 : N, fiet $\omega =$ 0.00005. Eodemque modo ſi Terra ad Jovem referatur, & ratio diſtantiarum Planetæ utriuſque a Sole ſit 1 : 0.1924, & periodicum tempus Terræ ad tempus reverſionis ad eumdem aſpectum Jovis ſe habeat ut 11 : 12, erit $\omega = 0.000009$. Si orbita Veneris ad Terræ orbitam referatur, erit N = 2.88, & $4 - N^2 = -3.84$, adeoque ellipſis illa, in quam orbita Veneris abibit ob Terræ vim, contraria ratione diſponetur, & major ipſius axis ſyzigias, major quadraturas Terræ reſpiciet.

Problema XI.

Invenire æquationes motus Planetarum inferiorum, qui perturbantur a ſuperioribus.

Cum dato vectore radio angularis motus proportionalis ſit velocitati perpendiculari ad eumdem radium, & data velocitate projectionis, ob æquales areas æqualibus temporibus deſcriptas, angularis velocitas ſit reciproce ut radius vector, & angularis motus reciproce ut quadratum vectoris radii; generatim erit angularis motus ut velocitas projectionis directe, & reciproce ut quadratum vectoris radii. Jam vero, juxta Probl. IX., ob ſuperioris Planetæ actionem inferioris velocitas augebitur in ratione

$$1+\frac{3N}{8Ma^4}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\text{coſ}.STL+\frac{N}{4Ma^3}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\text{coſ}.2STL:1,$$

& ſi radius mediocris orbitæ accipiatur loco unitatis, & ſit ω ſemidifferentia ſemiaxium orbitæ, quæ revolutione ellipſeos circa centrum in ſpatio immobili ut antea deſcribi poteſt, atque inſuper tranſpoſitionis quantitas ſit ϖ; juxta Theor. III., & Probl. IX. erit in fig. 36. radius quicumque vector $TL = 1 + \varpi.\text{coſ}.STL - \omega.\text{coſ}.2STL$. Itaque inferioris Planetæ motus ſuperioris actione augebitur in ratione

$$1-\left(2\varpi-\frac{3N}{8Ma^4}.\overline{1+\frac{5}{8a^2}}\right).\text{c}.STL+\left(2\omega+\frac{N}{4Ma^3}.\overline{3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}}\right).\text{c}.2STL$$

ad unitatem. Tempus autem, quo quiſque angulus deſcribitur, eſt in ratione angularis motus reciproce. Quod ſi igitur motus medius inferioris Planetæ vocetur Z, verus autem z, & ſit ſuperioris motus nz, ac fiat angulus $STL = z - nz$, ſummis elementorum omnium acceptis, ob $\frac{1}{1-n} = N$, erit

$z =$

$$z = Z - \left(2\varpi N - \frac{3N^2}{8Ma^4}\cdot\overline{1+\frac{5}{8a^2}}\right).\text{ſin.}(z - nz)$$
$$+ \left(\omega N + \frac{N^2}{8Ma^3}\cdot\overline{3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}}\right).\text{ſin.}(2z - 2nz).$$

Corollarium I.

Iiſdem igitur ſubſtitutionibus, quæ ſupra, inveniri poterunt æquationes illæ, quæ primæ, & ſecundæ variationi Lunæ in Planetis ſingulis reſpondent, quæque habent pro argumento angularem diſtantiam ſuperioris ab inferiore ſemel, ac bis acceptam. Ut ſi primus Jovis Satelles ad ſecundum referatur, & ſit $N = 1.9926$, $\frac{1}{a} = 0.6285$, $\varpi = \frac{0.7176}{M}$, & $\omega = \frac{193.97}{M}$, erit $2\varpi N - \frac{3N^2}{8Ma^4}\cdot\overline{1+\frac{5}{8a^2}} = \frac{2.6}{M}$ circiter, & $\omega N = \frac{387.122}{M}$, quartoque etiam ſeriei termino ſupputato erit $\frac{N^2}{8Ma^3}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}+\frac{315}{512a^6}\right) = \frac{0.445}{M}$, & ſi media diſtantia utriuſque Satellitis vocetur X, neglectis exiguis aliis correctionibus fiet $z = Z - \frac{2.6}{M}.\text{ſin.}X + \frac{387.567}{M}.\text{ſin.}2X$.

Corollarium II.

Neglecta vero priori æquatione ob parvitatem, & loco radii ſcribendo 57.29578°, fiet altera æquatio $\frac{1}{M}.133236'.\text{ſin.}2X$, eaque in primo, ac tertio quadrante poſt conjunctionem ſecundi Satellitis motui medio Satellitis intimi addenda erit, & in quadrante ſecundo, & quarto detrahenda ut motus verus habeatur. Et cum velocitas intimi ipſius Satellitis, juxta formulam Probl. IX., in ſyzigiis maxima eſſe debeat; maxima veri, & medii motus differentia habebitur in octantibus, atque ea etiam juxta obſervationes illas, quas libri hujus initio recenſuimus, $29\frac{1}{2}'$ eſſe poterit ſi maſſa Jovis ad ſecundi Satellitis maſſam ſe habeat ut 1 : 0.00002214.

Corollarium III.

Si ſecundus Satelles ad tertium referatur, & juxta Coroll. III. Probl.

Probl. XIII. fiat $N = 1.9853$, & $\omega = \frac{95 \cdot 55}{M}$, erit $\omega N + \frac{N^2}{4 M a^2}\left(3 + \frac{5}{4 a^2} + \frac{105}{128 a^4} + \frac{315}{512 a^6}\right) = \frac{190}{M}$ satis proxime: & si distantia utriusque Satellitis visa e centro Jovis vocetur X^{I}, erunt binæ secundi Satellitis æquationes $- \frac{2 \cdot 6}{M}$. fin. $X^{I} + \frac{190}{M}$. fin. $2X^{I}$. Pariter si tertio Jovis Satellite relato ad quartum sit $1 : 1.75 = 1 : N = 1 : a$ circiter, & tertii, ac quarti Satellitis distantia sit X^{II}, erunt pro tertio Satellite æquationes motus $- \frac{1 \cdot 5}{M}$. fin. $X^{II} + \frac{5 \cdot 5}{M}$. fin. $2X^{II}$, eodemque ordine addendæ, ac subtrahendæ erunt singulæ.

COROLLARIUM VI.

Si massa quarti Satellitis præ Jovis massa sit 0.00021, fiet potior tertii Satellitis æquatio $4'$. fin. $2X^{II}$: ac pariter si æquatio secundi Satellitis sit $1° 9'$. fin. $2X^{I}$, eaque ex tertii actione oriri omnis intelligatur, erit massa tertii Satellitis 0.0001. Est autem fin. $2X^{I} = -$ fin. X, ut libri hujus initio notatum est. In iis ergo hypothesibus massarum erit primi Satellitis variatio $29\frac{1}{2}'$. fin. 2X, secundi vero $- 1° 9'$. fin. X, ac motus medius secundi Satellitis actione tertii minuetur post conjunctionem primi, ac post oppositionem augebitur, & maxima motus veri, ac medii differentia habebitur in quadraturis, cum primi Satellitis variatio fiat maxima in octantibus. Ob eamdem rationem censeri poterit motum medium tertii Satellitis fere post conjunctionem secundi imminui, & post oppositionem augeri.

COROLLARIUM V.

Simili modo si perturbationes motus quærantur, quæ in Jove ex Saturni actione gigni possent, eædemque fiant substitutiones Coroll. IV. Problematis superioris, & Planetarum distantia vocetur X, fiet $\omega N + \frac{N^2}{8 M a^2}\left(3 + \frac{5}{4 a^2} + \frac{105}{128 a^4}\right) = 0.0011$ satis proxime, eruntque æquationes binæ $- 1' 26''$. fin. X $+ 3' 44''$. fin. 2X. Pariter erunt æquationes Martis ex Jove $- 24''$. fin. X $+ 15.5''$. fin. 2X: Terræ ex Jove $- 7''$. fin. X $+ 2.5''$. fin. 2X : Veneris ex Terra $- 5''$. fin. X $- 10''$. fin. 2X. At cum in orbitis Martis potissi-

mum,

mum, ac Jovis excentricitas nequeat negligi, neque adeo accurata censeri possint theoremata, quæ in orbitis Satellitum Jovialium locum habent, præstabit Planetarum primariorum æquationes ex generali solutione problematis inferius derivare.

Scholion.

Cum inæqualitatum motus supputandarum problema a Luna ad Planetas alios traducitur, primo occurrit difficultas serierum, quæ vires perturbatrices exprimunt, & quæ non adeo celeriter convergunt ut primi tantum earum termini possint accipi. Et quidem Eulerus in dissertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni perturbatricium virium seriem, quæ prima fronte se se offert, & quæ potestates varias complectitur cosinus ejusdem arcus, ope trigonometricorum theorematum, resolvit in seriem aliam, cujus termini involvunt cosinus angulorum multiplorum, & quæ integratione habita celerius convergit. Denique ut termini uniuscujusque coefficientes inveniret Eulerus §. XXIX. & XXX. formulas quasdam protulit, quæ & quantitatem duorum priorum coefficientium, & legem aliorum subsequentium, atque ex duobus prioribus pendentium determinant. Alembertius lib. 2. de Mundi systemate cap. 3. §. 225., & sequentibus ex binomii formulis aliam methodum eruit pro iisdem coefficientibus determinandis, in qua illud commodi, & elegantiæ est, quod coefficientes terminorum omnium seriei pendeant similiter ex duobus primis, & primus exprimatur serie, quæ post quinque, aut sex terminos in progressionem geometricam recidit, secundus vero serie alia exprimatur, quæ desinit in progressionem geometricam post septem, aut octo terminos. Clairaut in actis Parisiensis Academiæ anni 1754. pro iisdem coefficientibus supputandis quadraturarum methodo usus est: quam methodum simpliciorem etiam effecit D. Bailly part. 2. sect. 1. Theoriæ Satellitum Jovialium. At vero satis convergere videtur prior illa series, quæ continet potestates varias cosinus distantiæ superioris Planetæ ab inferiore, & quæ facile in seriem aliam convertitur, cujus termini continent cosinus angulorum multiplorum. Series, ut offert se se illico, in Problem. VIII. ad tertium usque, & quartum terminum perducta est: termini autem hujusmodi præ duobus prioribus tam sunt exigui, ut succedentes alii possint negligi. In libro etiam subsequenti, cum de nodorum motu, & variatione inclinationis orbitæ erit sermo, appositis exemplis aliis præsto erit series, quæ perturbatrices vires definiunt, satis celeriter convergere, quantum ad solutionem problematum hujus generis sufficiat.

ficiat. Serierum earumdem ope methodum illam, qua primo variationem Lunæ in circulari orbita determinavimus, ad Planetas omnes, ac Satellites inferiores traduximus, qui perturbantur a superioribus. Antequam æquationes singulas cum aliorum authorum supputationibus comparemus, videndum superest quæ inæqualitates motus vicissim in superioribus Planetis, ac Satellitibus inferiorum actione gigni possint.

CAPUT QUARTUM.

DE ÆQUATIONIBUS SATELLITUM SUPERIORUM.

PROBLEMA XII.

INvenire vires acceleratrices, quibus Planetæ superiores juxta vectorem orbitæ radium perturbantur ab inferioribus.

Sit in fig. 36. inferior Planeta S, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus, juxta Prob. I. sit $\frac{b^2 - at}{b(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}}$ vis, qua ipse attrahit superiorem Planetam L juxta vectorem radium TL. Quia etiam orbitæ centrum T secundum radium eumdem trahitur vi $\frac{t}{ba^2}$, erit $\frac{b^2 - at}{b(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t}{ba^2}$ vis, qua superior Planeta inferioris Planetæ actione trahetur ad idem centrum. Et quia est a major quam b, ita in seriem evolvendo fractionem, quæ vim perturbatricem designat, ut denominatores fractionum aliarum inde prodeuntium sint potestates variæ radii vectoris b; in eadem serie Probl. I., & VIII. libri hujus fiet $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{b^2}$, & $Q = \frac{a^2 - 2at}{b^2}$, atque in denominatoribus singulis subsequentium terminorum scribere oportebit b^2 loco a^2, in numeratoribus vero $\frac{a^2}{b^2}$ loco $\frac{b^2}{a^2}$, & $\frac{2at}{b^2}$ loco $\frac{2at}{a^2}$. Hoc ipso evadet $\frac{1}{(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} + \frac{3at}{b^5} - \frac{3a^2}{2b^5}$ $+ \frac{15a^2t^2}{2b^7} - \frac{15a^3t}{2b^7} + \frac{15a^4}{8b^7} + \frac{35a^3t^3}{2b^9} - \frac{105a^4t^2}{4b^9} + \frac{315a^4t^4}{8b^{11}}$

$+ \frac{105 a^4 t}{8 b^9} - \frac{315 a^4 t^3}{4 b^{11}} + \frac{693 a^4 t^5}{8 b^{13}}$. Qui termini omnes si ducantur in $b - \frac{at}{b}$, addaturque terminus $\frac{t}{ba^2}$, eodemque ordine Probl. VIII. pro potestatibus variis quantitatis $\frac{t}{b}$, seu cosinus anguli STL substituantur cosinus angulorum multiplorum, collectis simul, atque ordinatis terminis, incrementum vis centripetæ superioris ipsius Planetæ inferioris actione ortum prodibit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^4} + \frac{45a^4}{64b^6} \\
&+ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2a}{b^3} + \frac{3a^3}{2b^5} + \frac{45a^5}{32b^7}\right).\, \text{cos. STL} \\
&+ \left(\frac{9a^2}{4b^4} + \frac{25a^4}{16b^6}\right).\, \text{cos. 2STL} \\
&+ \frac{5a^3}{2b^5}.\, \text{cos. 3STL}.
\end{aligned}
$$

Corollarium.

Si massa corporis in centro positi ad Planetæ inferioris, & attrahentis massam se habeat ut M : 1, erit $\frac{M+1}{b^2}$ gravitas omnis, qua ellipsis a superiore Planeta describi poterit: & si gravitas ipsa in mediocri distantia accipiatur loco unitatis, & præ centrali corpore negligatur Planetæ inferioris massa, erit vis perturbatrix, qua superior Planeta ad centrum propius trahetur

$$
\begin{aligned}
&\frac{3a^2}{4Mb^4}\left(1 + \frac{15a^2}{16b^2}\right) \\
&+ \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2a}{b^3} + \frac{3a^3}{2b^5} + \frac{45a^5}{32b^7}\right).\, \text{cos. STL} \\
&+ \frac{a^2}{4Mb^4}\left(9 + \frac{25a^2}{4b^2}\right).\, \text{cos. 2STL} \\
&+ \frac{5a^3}{2Mb^5}.\, \text{cos. 3STL}.
\end{aligned}
$$

Problema XIII.

Invenire variationem velocitatis, quæ in Planetis superioribus inferiorum actione oriri potest.

Cum

Cum vis perpendicularis radio ſit $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a^2}\right)$, ſimili reſolutione facta vis eadem evadet $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{3a^2t}{b^5}-\right.$

$$\left.\frac{3a^3}{2b^5}+\frac{15a^3t^2}{2b^7}-\frac{15a^4t}{2b^7}+\frac{35a^4t^3}{2b^9}+\frac{15a^5}{8b^7}-\frac{105a^5t^2}{4b^9}+\frac{315a^5t^4}{8b^{11}}\right),$$

ac rurſus pro poteſtatibus variis coſinus anguli STL ſubſtituendo coſinus angulorum multiplorum, & producta omnia coſinuum, ac ſinus recti reſolvendo, vis omnis fiet

$$\left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{3a^3}{8b^5}+\frac{15a^5}{64b^7}\right).\,\text{ſin.}\,STL$$
$$+\left(\frac{3a^2}{2b^4}+\frac{5a^4}{8b^6}\right).\,\text{ſin.}\,2STL+\frac{15a^3}{8b^5}.\,\text{ſin.}\,3STL.$$

Jam vero ſi angulares motus Planetæ ſuperioris, inferioriſque ſint inter ſe ut $n:1$, & tempus, quo inferior Planeta revolutionem integram abſolvit, ad tempus, quo ad eumdem ſuperioris Planetæ aſpectum revertitur, ſe habeat ut $1:N$; dum inferior Planeta angulo LTl fiet propior ſuperiori, revera deſcribet angulum $N.LTl$, ſuperior autem Planeta interim deſcribet angulum $n.N.LTl$. Quia igitur tendendo a quadraturis ad conjunctionem Planeta inferior ſuperiorem, qui tardior eſt, ſubſequitur, ipſumque tardiorem efficit, ſi V deſignet ſuperioris Planetæ velocitatem, & radius ſuperioris ipſius orbitæ accipiatur pro unitate, & centri maſſa ut antea vocetur M, eadem methodo Probl. IX. eruetur

$$V^2 = C-\frac{nN}{M}\left(2a-\frac{2}{a^2}+\frac{3}{4}a^3+\frac{15}{32}a^5\right).\,\text{coſ.}\,STL$$
$$-\frac{nN}{M}\left(\frac{3}{2}a^2+\frac{5}{8}a^4\right).\,\text{coſ.}\,2STL-\frac{5nNa^3}{4M}.\,\text{coſ.}\,3STL.$$

Corollarium.

Si quantitas conſtans C in orbita proxime circulari pro unitate accipiatur, & quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis dividatur per vim centripetam $1+\frac{3a^2}{4M}\left(1+\frac{15}{16}a^2\right)$

$$+\frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2}+2a+\frac{3}{2}a^3+\frac{45}{32}a^5\right).\text{coſ.}STL+\frac{a^2}{4M}\left(9+\frac{25}{4}a^2\right).\text{coſ.}2STL$$

fiet

fiet radius osculator orbitæ Planetæ superioris

$$1 - \frac{3a^2}{4M}\left(1 + \frac{15}{16}a^2\right)$$

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{1-2nN}{a^2} + 2a.\overline{1+nN} + \frac{3}{4}a^2.\overline{2+nN} + \frac{15}{32}a^2.\overline{3+nN}\right).\text{cof. STL}$$

$$-\frac{a^2}{M}\left(\frac{3}{2}.\frac{\overline{3}}{2}\overline{+nN} + \frac{5}{8}a^2.\frac{\overline{5}}{2}\overline{+nN}\right).\text{cof. 2STL}.$$

THEOREMA IV.

Si in plano, quod circa centrum eodem angulari motu Planetæ inferioris revolvatur, ellipsis descripta sit, & major ellipseos axis syzigiis Planetæ superioris, inferiorisque, minor quadraturarum lineæ respondeat, eaque parallele ad syzigiarum lineam transponatur; superioris Planetæ semita quam proxime exhiberi poterit ellipsi hujusmodi in spatio immobili sic revoluta, ut, paribus a centro distantiis, anguli in plano mobili, atque immobili percursi sint inter se ut differentia angularium motuum Planetæ utriusque ad superioris Planetæ motum.

Primo enim si posterior tantum sumatur corollarii antecedentis terminus, differentiæ radiorum osculatorum universim erunt ut cosinus duplæ distantiæ Planetæ utriusque, adeoque osculatores radii a quadraturis transeundo ad syzigias imminuentur in duplicata ratione sinus distantiæ Planetæ superioris a quadraturis Planetæ alterius inferioris. Itaque superioris Planetæ semita in plano illo, quod eodem inferioris Planetæ motu volvatur circa centrum, erit ellipsis, cujus major axis ad inferiorem Planetam ipsum dirigetur. Deinde vero cum priori etiam spectato termino gravitas in centrum augeatur, & vis centrifuga minuatur quantitate alia exigua, quæ est in simplici ratione sinus distantiæ Planetæ utriusque, seu cosinus distantiæ Planetæ superioris a quadraturis, manifestum est paribus intervallis, & citra & ultra quadraturarum lineam Planetam superiorem in adversas partes extra orbitam ellipticam debere excurrere, & differentiam vectoris cujusque radii saltem quam proxime cosinui eidem proportionalem esse oportere: quod in ellipsi parallele ad syzigiarum lineam transposita locum habet. Denique cum anguli a Planeta superiore in plano ut antea mobili, atque in immobili spatio descripti sint inter se in ratione motus relativi Planetæ utriusque ad absolutum superioris motum, patet in spatio ipso immobili semitam

supe-

ſuperioris Planetæ conſtrui angulares diſtantias vectoris cujuſque radii a majori axe tranſpoſitæ ellipſeos minuendo in ratione eadem motus abſoluti ad relativum.

Corollarium.

Ellipſes igitur, in quas primum circulares orbitæ abire debent, contraria ratione in Planetis inferioribus, ac ſuperioribus diſponentur, ut in illis quidem ſemiaxis minor, & in his major ad Planetam alium attrahentem dirigatur. Inſuper ellipſeos tranſpoſitæ revolutio in Planetis inferioribus ſic fiet, ut quæ æqualibus radiis reſpondent angulares diſtantiæ a quadraturis in plano mobili, & immobili ſe habeant ut $1 : N = 1 - n : 1$. In ſuperioribus Planetis cum juxta Probl. XIII. ratio relativi motus ad abſolutum ſit $1 : nN$, erit ratio angularium diſtantiarum in plano utroque $1 : nN = \frac{1}{n} - 1 : 1$.

Problema XIV.

Iiſdem poſitis invenire differentias ſemiaxium.

Si eadem methodo Probl. X. a termino illo exordiamur, qui pro argumento habet duplum angulum STL, & fiat cof. $2STL = \pm 1$, radius oſculi in ſyzigiis, five in vertice majoris axis ellipſeos, ad radium oſculi in quadraturis, ſive in vertice minoris axis ſe habebit ut $1 : 1 + \frac{a^2}{M}(3 \cdot \overline{\tfrac{3}{2} + nN} + \tfrac{5}{4} a^2 \cdot \overline{\tfrac{5}{2} + nN})$. Jam vero ſi ellipſeos mediocris radius vocetur 1, & differentia ipſius radii, majoriſque, aut minoris ſemiaxis ſit ω, iiſdem initis Probl. V. rationibus, & juxta poſterius corollarium loco N^2 ſcribendo $n^2 N^2$, fiet eadem radiorum oſculatorum ratio in vertice majoris, & minoris axis ellipſeos $1 : 1 + 2\omega \cdot \frac{4 - n^2 N^2}{n^2 N^2}$. Itaque binis rationibus inter ſe æquatis fiet

$$\omega = \frac{a^2 n^2 N^2}{2M(4 - n^2 N^2)} \left(3 \cdot \overline{\tfrac{3}{2} + nN} + \tfrac{5}{4} a^2 \cdot \overline{\tfrac{5}{2} + nN}\right).$$

Pariter ſit ſit ϖ quantitas, qua ſuperioris Planetæ orbita, ſpectato alio ſeriei termino debet tranſponi, & loco N^2 rurſus ſcribamus $n^2 N^2$, eadem methodo Probl. VI. libri hujus patebit radium orbitæ proxime circularis ad differentiam radiorum circuli, & orbitæ in plano immobili deſcriptæ eſſe oportere ut $n^2 N^2 : \varpi(n^2 N^2 - 1)$. Jam vero juxta corollarium Probl. XIII., poſito cof. STL $= 1$, ratio hujuſmodi in conjunctione eſſe debet

$1 : -$

$$1 : -\frac{1}{M}\left(\frac{1-2nN}{a^2}+2a.\overline{1+nN}+\tfrac{3}{4}a^3.\overline{2+nN}+\frac{15a^5}{32}\cdot\overline{3+nN}\right).$$

Itaque exæquatis rurſus rationibus prodibit

$$\varpi=\frac{n^2N^2}{M.(1-n^2N^2)}\left(\frac{1-2nN}{a^2}+2a.\overline{1+nN}+\tfrac{3}{4}a^3.\overline{2+nN}+\frac{15}{32}a^5\cdot\overline{3+nN}\right).$$

COROLLARIUM I.

Si loco N ſcribamus $\frac{1}{1-n}$, reductis terminis omnibus habebimus

$$\rho=\frac{a^2n^2}{2M.\overline{1-n}.(2-2n^2-n^3)}\left(\tfrac{1}{4}\cdot\overline{3-n}+\tfrac{5}{8}a^2\cdot\overline{5-3n}\right),$$

$$\varpi=\frac{n^2}{M.\overline{1-n}.(1-n^2-n^3)}\left(\frac{1-3n}{a^2}+2a+\tfrac{3}{4}a^3.\overline{2-n}+\frac{15}{32}a^5\cdot\overline{3-2n}\right):$$

quas eaſdem formulas inferius generali alia methodo eruemus.

COROLLARIUM II.

Quia in ſuperioribus Satellitibus Jovis revolutionis tempus duplo circiter majus eſt quam in aliis proxime inferioribus, atque eſt fere $n=\frac{1}{2}$, exigua erit fractio $(1-n)^2-n^2$, & poſterior ſemiaxium variatio, quæ ex tranſpoſitione orbitæ orietur, longe erit major quam quæ ex ellipticitate oriri poſſet. Orbita igitur Satellitis cujuſque ſuperioris in plano, quod eodem angulari motu inferioris Satellitis volvatur circa centrum, ſatis accurate conſtruetur circulari orbita parallele ad lineam ſyzigiarum verſus conjunctionis plagam tranſpoſita: in ſpatio autem immobili veſtigium ſemitæ habebitur angulares diſtantias vectoris cujuſque radii ab immobili quadraturarum linea minuendo ut antea in ratione motus relativi ad abſolutum.

COROLLARIUM III.

Si requirantur variationes vectoris radii, quæ in orbita ſecundi Jovis Satellitis actione primi Satellitis haberi debent, ſumptiſque ut ſupra temporibus periodicis fiat $n=\frac{2547}{5113}=0.498$, & $a=0.6285$; numeris omnibus ſubſtitutis fiet $\varpi=\frac{48.26}{M}$, & $\rho=\frac{0.59}{M}=\frac{1}{82}.\varpi$ circiter. Quod ſi eadem ratione tertius Satelles ad

ad fecundum referatur, ac fiat $n = \frac{5113}{10302} = 0.4963$, & $a = 0.62687$, prodibit $\varpi = \frac{23.47}{M}$, & $\epsilon = \frac{0.58}{M}$. Denique fi quarto Satellite relato ad tertium fiat $n = 0.428$, & $a = 0.568$, iifdem fubftitutionibus prodibit $\varpi = \frac{1.18}{M}$, & $\epsilon = \frac{0.22}{M}$.

Problema XV.

Invenire æquationes motus Planetarum, ac Satellitum fuperiorum, qui perturbantur ab inferioribus.

Pofitis omnibus, quæ antea, fi major femiaxis orbitæ, qui conjunctioni refpondet, fit $1 + \varpi + \epsilon$, & qui refpondet quadraturis fit $1 - \epsilon$, erit alius quicumque vector orbitæ radius $1 + \varpi . \text{cof.} STL + \epsilon . \text{cof.} 2STL$. Velocitas etiam Planetæ fuperioris, juxta Probl. XIII. inferioris actione minuetur in ratione

$$1 - \frac{nN}{M}\left(a - \frac{1}{a^2} + \frac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5\right).\text{cof.}STL - \frac{a^2 nN}{M}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{8}a^2\right).\text{cof.}2STL : 1.$$

Quare cum angularis motus fit ut velocitas projectionis directe, & quadratum vectoris radii reciproce: & tempus quo quifque angulus defcribitur, fit reciproce ut verus angularis motus: motus autem medius fit tempori proportionalis; in primis verus angularis motus minuetur in ratione

$$1 - 2\varpi . \text{cof.} STL - \frac{nN}{M}\left(a - \frac{1}{a^2} + \frac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5\right).\text{cof.} STL$$

$$- 2\epsilon . \text{cof.} 2STL - \frac{a^2 nN}{M}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{8}a^2\right).\text{cof.} 2STL : 1.$$

Deinde vero fi motus verus Planetæ fuperioris ut antea fit nz, medius autem nZ, erit elementum medii ipfius motus $ndz = ndZ$

$$- 2\varpi ndz . \text{cof.}(z - nz) - \frac{n^2 Ndz}{M}\left(a - \frac{1}{a^2} + \frac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5\right).\text{cof.}(z - nz)$$

$$- 2\epsilon . ndz . \text{cof.}(2z - 2nz) - \frac{a^2 n^2 N dz}{M}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{8}a^2\right).\text{cof.}(2z - 2nz).$$

Ac denique fummis omnibus acceptis erit

$$nz = nZ - 2\varpi nN.\text{fin.}(z - nz) - \frac{n^2 N^2}{M}\left(a - \frac{1}{a^2} + \frac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5\right).\text{fin.}(z - nz)$$

$$- \epsilon nN.\text{fin.}(2z - 2nz) - \frac{a^2 n^2 N^2}{4M}\left(3 + \frac{5}{4}a^2\right).\text{fin.}(2z - 2nz).$$

Co-

Corollarium I.

Si requirantur perturbationes motus secundi Jovis Satellitis, quæ actione primi haberi debent, iisdem factis substitutionibus corollarii posterioris, fiet pro secundo eodem Satellite

$$nz = nZ - \frac{95 \cdot 47}{M} \cdot \text{sin.}(z - nz) - \frac{0 \cdot 95}{M} \cdot \text{sin.}(2z - 2nz)$$

$= nZ - \frac{95 \cdot 47}{M} \cdot \text{sin.}\, X - \frac{0 \cdot 95}{M} \cdot \text{sin.}\, 2X$. Simili modo æquationes tertii Jovis Satellitis actione secundi evadent $- \frac{44 \cdot 48}{M} \cdot \text{sin.}\, X^{I}$ $- \frac{0 \cdot 92}{M} \cdot \text{sin.}\, 2X^{I}$: & æquationes tertii actione quarti $- \frac{0 \cdot 4}{M} \cdot \text{sin.}\, X^{II}$ $- \frac{0 \cdot 3}{M} \cdot \text{sin.}\, 2X^{II}$, si scilicet angulares distantiæ primi, & secundi Satellitis, secundi, & tertii, tertii, & quarti sint ordine X, X^{I}, X^{II}.

Corollarium II.

Si copulentur simul præcipuæ æquationes motus, quæ in secundo Satellite actionibus primi, ac tertii haberi debent, & sint $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N}$ rationes massarum primi, ac tertii ipsius Satellitis ad massam Jovis, & primi, ac secundi distantia vocetur X, secundi, & tertii X^{I}, juxta Coroll. III., & IV. Probl. XI., & corollarium antecedens, omissis aliis terminis minoribus habebimus $\frac{190}{N} \cdot \text{sin.}\, 2X^{I}$ $- \frac{95 \cdot 47}{M} \cdot \text{sin.}\, X = -\left(\frac{190}{N} + \frac{95 \cdot 47}{M}\right) \cdot \text{sin.}\, X$: qui bini termini cum simul conficere debeant $- 1^{\circ}\, 9^{I} \cdot \text{sin.}\, X$, ut initio libri hujus diximus, variæ prodibunt hypotheses massarum primi, & tertii Satellitis, quæ maximæ intermedii Satellitis æquationi servandæ satisfacient. Ita si massæ primi, ac tertii Satellitis statui possent inter se æquales esset $\frac{285 \cdot 47}{M}$ $(57 \cdot 29578^{\circ}) = 1^{\circ}\, 9^{I}$, atque inde erueretur $\frac{1}{M} = \frac{1}{N} = 0.00007$.

Scholion.

Hisce æquationibus, quæ motus medii Satellitum Jovialium varia-

variationes satis definiunt, ubi in subsequenti libro addiderimus theoriam motus nodorum, variæque inclinationis orbitarum ad se invicem, & ad planum æquatoris Jovis, integram, facilemque solutionem habebimus totius problematis anno 1766. propositi a Parisiensi Academia. Et quidem æquationes ipsæ satis cum iis conveniunt, quas tradiderunt D. Bailly in illustri opere de Theoria Satellitum Jovialium, & D. la Grange in dissertatione, quæ eodem anno Academiæ præmium meruit. Scilicet æquationes, quæ oriuntur ex mutua quarti, & tertii Satellitis actione, omnino eædem: quæ ex primi, & secundi actionibus, atque ex actione etiam tertii in secundum oriuntur, paulo minores nobis, iisdemque Authoribus prodierunt. Differentia tamen omnis non adeo magna est ut in varietatem elementorum calculi nequeat rejici. At prorsus singulare est paradoxum a D. Bailly adnotatum in sectione secunda partis tertiæ, quod scilicet analyticas expressiones actionum primi, & tertii Satellitis in secundum cum observationibus Astronomicis comparando aut primi, aut tertii massa negativo signo videatur affici. Cum enim loco terminorum, quibus actiones hujusmodi supra expressimus,

$$-\frac{95.47}{M}.\sin.X-\frac{0.95}{M}.\sin.2X-\frac{2.6}{N}.\sin.X^{1}+\frac{190}{N}.\sin.2X^{1},$$

in præcedenti sectione Author ipse terminos alios statuisset

$$-\frac{116.78}{M}.\sin.X-\frac{0.85}{M}.\sin.2X-\frac{2.957}{N}.\sin.X^{1}+\frac{200.82}{N}.\sin.2X^{1},$$

omissis ob parvitatem terminis secundo, & tertio, primumque, & quartum comparando cum observationibus dierum 9. Martii, & 28. Aprilis anni 1733. æquationes binas obtinuit

$$\frac{1133}{M}+\frac{1948}{N}=0.1978$$

$$\frac{686}{M}+\frac{1181}{N}=0.1186,$$

quibus inter se collatis illico eruitur

$$\frac{1}{M}=0.0001746-\frac{1.7193}{N}=0.0001729-\frac{1.7216}{N},$$

ac fit propterea $\frac{1}{N}=-0.000739$, & $\frac{1}{M}=0.0014454$.

Hanc ipse paradoxi speciem ex eo oriri censuit quod aliæ sint inæqualitates motus secundi Satellitis ab excentricitate orbitæ pendentes,

dentes, quæ cum prioribus æquationibus ad massarum rationem investigandam componi debeant. Atque ob excentricitatis, & æquationum inde pendentium incertitudinem censuit materiæ quantitatem in primo, & tertio ex motu nodorum secundi Satellitis rectius posse colligi. Denique cum motum eumdem assumpsisset 12° annis singulis, collatis inter se formulis motus nodorum ad planum Jovialis orbitæ reducti, æquationisque motus totius periodici circa Jovem

statuit $\frac{1}{N} = 0.0001327$, & $\frac{1}{M} = 0.000337$. At vero ex Probl. V. subsequentis libri patebit nodorum motum in singulis Satellitibus potiori ex parte a figura Jovis sphæroidica pendere, ut etiam a D. Walmesley adnotatum fuerat in Transact. Philos. anni 1758. Cumque absoluta motus nodorum quantitas, ac periodus in secundo Satellite determinandis primi, ac tertii massis sit prorsus impar, excentricitas orbitæ, quæ non nisi valde exigua esse potest, nihil videtur suppeditare, quod ad eamdem determinationem conducat. In binis autem iis æquationibus superioribus cum massarum rationes subductis a se invicem numeris proxime æqualibus eruantur, patet exiguum etiam aut approximationum analyticarum, aut astronomicarum observationum defectum in rationibus ipsis errorem non ita exiguum posse parere. Si instituti calculi approximationes, observationesque accuratæ satis censeantur, & variatio motus secundi Satellitis eam quantitatem, ac legem servet, quam initio hujus libri indicavimus, ad tempus quocumque datum non nisi unica æquatio habebitur

$$\left(\frac{116.78}{M} + \frac{200.82}{N}\right).\text{sin.}\,X = \frac{1^\circ\, 9^{\prime}}{57.29578^\circ}.\,\text{sin.}\,X,$$

& quicumque propterea assumatur angulus, & sinus X binæ simul quantitates $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N}$ determinari nequaquam poterunt.

DE

DE MOTU ORBIUM PLANETARUM.

LIBER TERTIUS.

INclinatio media lunaris orbitæ ad planum Eclipticæ juxta Majerum assumi debet $5° 9' 8''$: motus autem nodorum ex ipsius tabulis est $19° 19' 43''$ diebus 365 contra ordinem signorum, adeoque est integro anno sidereo $19° 20' 31''$ respectu punctorum æquinoctialium: medius vero apogæi motus diebus 365 est $40° 39' 50''$, & horis 6 est $1' 40''$, adeoque est anno integro respectu eorumdem punctorum $40° 41 \frac{1}{2}'$ juxta signorum ordinem. Tycho omnium primus detexerat inæqualitatem motus nodorum, & variationem inclinationis mediæ ad eclipticam: ac medii quidem, verique nodorum motus differentiam ad $1° 46'$ quandoque dixit pertingere: minimam vero lunaris orbitæ inclinationem $4° 58 \frac{1}{2}'$ in iis noviluniis, ac pleniluniis esse dixit, quæ habentur in distantia 90° Lunæ a nodis, maximam $5° 17 \frac{1}{2}'$ in quadraturis Lunæ cum Sole, & nodis. Newtonus in corollario Propos. XXXIII. Lib. III. ex phænomenis cælestibus erui censuit æquationem maximam medii nodorum motus in octantibus distantiæ Solis a nodo esse $1° 30'$, atque universim esse æquationem medii ipsius motus $1° 30'$. sin. $(2S - 2X)$, si S ut antea sit media Lunæ distantia a nodo, & media a Sole distantia vocetur X. In quo minime expectandum est ut observationibus coefficiens æquationis accurate determinetur cum error quivis exiguus in latitudiue Lunæ, & inclinatione orbitæ definienda errorem non ita exiguum in definiendo nodorum loco possit gignere. Æquationem præcipuam latitudinis Lunæ statuit Majerus $8' 50''$. sin. $(2X - S)$. De aliis æquationibus agemus postmodum.

Inclinationem orbitæ extimi Satellitis Saturni ad planum orbitæ a Saturno descriptæ circa Solem statuit Cassinus $13° 8'$ circiter, & Satellitum inferiorum inclinationem circiter $31°$, quæ fere annuli Saturnum circumambientis est inclinatio. Cassinus insuper observavit Satellitum Jovialium semitas parallelas videri iis zonis, quæ in disco Jovis deprehenduntur, & quæ parallelæ sunt æquatori

tori revolutionis Jovis circa axem proprium. Planum autem ejusdem æquatoris tribus fere gradibus inclinatur ad planum orbitæ descriptæ circa Solem. Inde ergo collegerat Cassinus quatuor Jovis Satellites in eodem fere æquatoris plano revolvi, & nodos quatuor orbitarum; æquatorisque cum plano Jovialis orbitæ non admodum a se invicem distare. Clariss. Wargentinus in Actis Upsaliensis Academiæ ut positionem orbitarum accuratius determinaret semimoras eclipsium contulit inter se. Collatis autem hisce omnibus eclipsium observationibus inclinationem orbitæ primi Satellitis constantem statuit: inclinationem orbitæ tertii ad annum usque 1697. imminutam esse, deinde auctam: inclinationem secundi imminui singulis annis 15, aut 16, & post annos totidem reverti in statum pristinum: & quidem annis 1671., 1701., 1731. statuit eamdem inclinationem fuisse minimam, maximam vero annis 1686., & 1715., aut 1716.

Clariss. Witchel in Transactionibus anni 1767., quo semimoras eclipsium rectius consideraret, sectiones Jovialis umbræ ellipticas esse animadvertit, & majores, minoresque sectionum diametros eamdem fere rationem inter se habere, quæ inter Jovis diametros intercedit. Invenit autem ob ellipticitatem sectionum umbræ semimoras eclipsium primi, secundi, tertii Satellitis 20'', 50'', 2' 19'' differre posse inter se, in quarto autem Satellite tantam esse posse æquationem, ut ad 11' 14'' quandoque ascendat. D. la Lande lib. XVIII. Astronomiæ habita umbræ ellipticæ ratione, & eclipsium observationibus collatis inter se invicem, inclinationem orbitæ primi, & quarti Satellitis ad planum Jovialis orbitæ constantem statuit, atque in primo esse 3° 4' 32'', in quarto 2° 24'. Denique inclinationes maximas orbitarum secundi, & tertii Satellitis definivit 3° 31' 37'', & 3° 13' 8'', minimas 2° 18' 43'', & 2° 49' 2'', ut sint inclinationes mediæ 2° 55' 10'', & 3° 1' 5'.

Nodus ascendens orbitæ tertii Satellitis circa annum 1697. fuit prope 14° 4' aquarii, & subsequentibus annis 30. progressus est usque ad 16° 7': tum circa annum 1730. visus est stationarius, & subsequentibus annis aliis 30. motu retrogrado ad 14° 13' rediisse visus est, non procul a loco, in quo erat anno 1697., ut ex Clariss. Wargentini litteris accepi. Nodus ascendens orbitæ quarti Satellitis in consequentia signa Eclipticæ progredi satis æquabiliter integro sæculo visus est, atque est annua ipsius nodi progressio 4' circiter. Locus nodi ascendentis, locus aphelii, atque inclinatio orbitæ ad eclipticam in Planetis primariis juxta tabulas Astronomicas pro sæculi hujus initio statui possunt ordine ut sequitur.

Or-

Orbitæ	inclinatio			locus nodi			locus aphelii		
	°	'	''	sig.	°	'	sig.	°	'
Saturni	2.	30.	36.	3.	21.	13½.	8.	29.	14.
Jovis	1.	19.	30.	3.	7.	30.	6.	10.	17.
Martis	1.	50.	54.	1.	17.	17½.	5.	35.	0.
Veneris	3.	23.	20.	2.	13.	59½.	10.	6.	56.
Mercurii	7.			1.	14.	43.	8.	13.	13.

Inclinatio eclipticæ ad æquatorem, sive eclipticæ obliquitas annis 300. ante Christum a Pythea deprehensa est 23° 52'. Albategnii, aliorumque Arabum observationes, quæ altissimorum gnomonum ope instituebantur, præ vetustissimis illis accuratiores censendæ sunt. Albategnius 750. annis post Christum obliquitatem eclipticæ definivit 23° 35': Thebit anno æræ vulgaris 901. eamdem statuit 23° 33½': & Mahmud anno 992. dumtaxat 23° 32½'. Tycho, aliique Astronomi decimi sexti sæculi inclinationem eclipticæ posuerunt 23° 31': ut etiam ferunt Copernici observationes si 2' addantur ob refractionem. Elapso sæculo 23° 30', & 23° 29' deprehensa est. Ex Flamsteedii observationibus anno 1691. mense Junio prodiit eclipticæ obliquitas 23° 29' 3'': unde quia tunc temporis nodus ascendens lunaris orbitæ reperiebatur circa 20° Piscium, detrahendo 8'' ob nutationem terrestris axis, esset obliquitas media 23° 28' 55''. Quod si igitur pro anno 1750. statuatur cum Caillio obliquitas media 23° 28' 19'', obliquitatis ipsius imminutio esset 36'' tempore annorum 59., & integro sæculo ad minutum circiter unum ascenderet. Cassinus in elementis Astronomiæ deprehendit obliquitatis imminutionem, quæ 66. annis respondet, ex serie plurium observationum prodire 30'', & integro sæculo 45½'', fere ut a Caillio etiam in tabulis Astronomicis statuta est. Clariss. Maskelinius correctis Arabum observationibus, additisque æquationibus omnibus præcessionis, nutationis &c., iisque inter se, & cum aliis ætatis nostræ observationibus comparatis, miro omnium consensu statuit obliquitatem eclipticæ 50'' singulis sæculis imminui: mediam autem obliquitatem ad annum 1756. constituit 23° 28' 16''. Hujus etiam variationis theoriam, & leges omnes, quibus orbitæ Planetarum ad se invicem diversimode inclinantur, ob elegantiam theorematum, & serierum facilitatem ante generalem solutionem problematis trium corporum se se attrahentium singillatim hoc in loco tradere visum est.

CA-

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU NODORUM ET VARIATIONE INCLINATIONIS LUNARIS ORBITÆ.

PROBLEMA I.

Motum nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ ad tempus datum invenire.

Sit in fig. 37. locus Lunæ L, Solis S, & ſit L*l* arcus dato elemento temporis deſcriptus, ſeu motus horarius Lunæ, accipiaturque LR = L*l*. Quia vires perpendiculares plano orbitæ BL*b* continue agunt per totum arcum LR, & velocitas motus uniformiter accelerati ea eſt, qua duplum ſpatium æquali tempore abſolvi poſſet, erit velocitas projectionis ad velocitatem plano orbitæ perpendicularem in puncto L ut L*l* ad ſpatium LO, quod juxta Coroll. II. Probl. II. Lib. II. ſit duplum ſpatii ob vires ipſas perpendiculares deſcripti a Luna, quo tempore arcum L*l* prioris orbitæ abſolveret. Completo igitur rectangulo LO*ol* erit Lunæ ſemita L*o*, ac prior ipſius orbita circa vectorem radium LT nutabit, ductaque ex nodo B recta B*z* perpendiculari ad LT, & ex L in BT perpendiculari alia LZ, erit L*l* ad *lo*, ſive ad LO, ut B*z*, ſive LZ ad arcum, quo punctum B ſupra planum prioris orbitæ elevabitur. Erit inſuper ſinus inclinationis lunaris orbitæ BA*b*, & plani eclipticæ B*ab* ad ſinum totum, ut arcus hujuſmodi a puncto B circa vectorem radium LT deſcriptus ad arcum BQ, quo retrocedet nodorum linea. Erit itaque $BQ = \frac{LZ.\,LO}{\pi.\,Ll} = \frac{LO}{\pi.\,Ll}.\,TL.\,\text{ſin.}\,LTB$, ac pro LO ſubſtituendo valorem in Coroll. II. Probl. II. Lib. II. ante inventum, & loco $\frac{1}{Ma^{3}}$ ſcribendo n^{2}, erit horarius motus nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ =

$$3n^{2}.\,\text{ſin.}\,ATB.\,\text{ſin.}\,LTB.\,TM.\,TL^{2}.\,Ll.\,\surd(1-\pi^{2}.\,\text{ſin.}\,ATB^{2}) =$$
$$3n^{2}.\,TL^{4}.\,\text{ſin.}\,ATB.\,\text{ſin.}\,LTB.\,\text{ſin.}\,LTD.\,dz.\,\surd(1-\pi^{2}.\,\text{ſin.}\,ATB^{2}).$$

Co-

Corollarium I.

Si negligatur quadratum ſinus inclinationis lunaris orbitæ, erit motus omnis nodorum in ratione compoſita ſinuum diſtantiæ Solis, & Lunæ a nodis, & ſinus diſtantiæ Lunæ a quadraturis. Quare ſi angulus ATB non ſit major 180°, & Luna inter B, & D reperiatur, aut inter b, & d, ſinus LTB, LTD contrario ſigno afficientur, & nodi eadem directione motus cum Luna ferentur in conſequentia. Si Luna deſcribat arcus BLd, aut Db, regredientur nodi contraria directione, ac quieſcent dumtaxat cum erunt nodi in ſyzigiis, aut cum nodis ubilibet conſtitutis Luna in quadraturis Solis, aut in nodorum linea reperietur, atque unus e tribus angulis fiet nullus. Integra tamen Lunæ revolutione fiet nodorum motus contra ordinem ſignorum in conſequentia.

Corollarium II.

Cum ob æquales angulos DTB, dTb, GAT, ſit ſin. LTB $=$ ſin. LTD. ſin. ATB $\mp$ coſ. LTD. coſ. ATB, neglecto poſteriore termino, qui in adverſis quadrantibus ambiguitate ſigni deſtruitur, & unitatem ſcribendo pro TL, fiet ſingulis revolutionibus horarius nodorum motus in orbita proxime circulari
$3n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . \text{ſin. LTD}^2 . dz . \surd(1 - \pi^2 . \text{ſin. ATB}^2)$. Quod ſi inſuper loco ſin. LTD² ſcribamus $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ coſ. 2LTD, atque in tota revolutione negligamus coſ. 2 LTD ob eamdem ſigni ambiguitatem, data Solis diſtantia a nodo, erit motus medius horarius ipſius nodi
$\frac{3}{2}n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz . \surd(1 - \pi^2 . \text{ſin. ATB}^2)$, ſeu proxime
$\frac{3}{2}n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz - \frac{3}{4} n^2 \pi^2 . \text{ſin. ATB}^4 . dz$.

Corollarium III.

Quia ſumma omnium ſin. ATB². dz per totam circuli peripheriam p eſt $\frac{1}{2} p$, ſive 180°, & ſumma omnium ſin. ATB⁴. dz eſt $\frac{3}{8}$.360°, erit ſingulis Lunæ revolutionibus medius nodorum motus $\overline{\frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{32} n^2 \pi^2} . 360°$, & cum periodica tempora Lunæ, & Solis ſint inter ſe ut $n : 1$, erit $\overline{\frac{3}{4} n - \frac{9}{32} n \pi^2} . 360°$ motus medius annuus nodorum qui haberetur ſi nodi horis ſingulis elapſis retraherentur in locum ſuum, & Sol ad eumdem nodum, a quo receſſerat, poſt integram revolutionem reverteretur. Numeris autem de more ſubſtitutis, & poſito ut antea $\pi = 0.8989$, fiet motus ipſe annuus 20° 8'.

Corollarium IV.

Motus medius horarius Lunæ a nodo $dz + \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz - \frac{3}{4} n^2 \pi^2 . \text{ſin. ATB}^4 . dz$ erit medius non geometrice, ſed arithmetice proportionalis inter motum Lunæ horarium dz, & motum maximum $dz + 3 n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz - \frac{3}{2} n^2 \pi^2 . \text{ſin. ATB}^4 . dz$, quo Luna in quadraturis nodorum, poſito ſin. $\text{LTD}^2 = 1$, celerrime inde recedit. Neglecta etiam inclinatione lunaris orbitæ motus horarius Solis a nodo $n dz + \frac{3}{4} n^2 dz$ erit medius arithmetice proportionalis inter motum Solis $n dz$, & motum $n dz + \frac{3}{2} n^2 dz$, quo Sol celerrime recedit a nodo cum inde diſtat quadrante integro, atque eſt ſin. $\text{ATB} = 1$.

Corollarium V.

Cum ſit quam proxime $\sqrt{(1 + 3 n^2 . \text{ſin. ATB}^2)} = 1 + \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2$, &, ob ſeriem celerrime convergentem, ſubſequentes termini poſſint negligi; motus Lunæ medius a nodo, dum nodi in quadraturis verſantur, erit quam proxime medius Geometrice proportionalis inter motum ipſius Lunæ medium, & motum illum, quo Luna in conjunctione cum Sole recedit celerrime a nodo. At cum ſit $\sqrt{(1 + \frac{3}{2} n)} = 1 + \frac{3}{4} n - \frac{9}{32} n^2 + \frac{27}{128} n^3$ &c., cum de motu Solis a nodo agetur, non ita converget ſeries ut primi tantum ipſius termini poſſint accipi, neque ita proxime verum erit quod motus Solis medius a nodo ſit medius geometrice proportionalis inter motum medium Solis, & motum illum medium, quo Sol recedit celerrime a nodo in quadraturis.

Problema II.

Invenire motum totalem annuum nodorum lunaris orbitæ.

Si ſit ut antea motus angularis Lunæ dz, Soliſque $n dz$, ac ſit $\frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz$ nodi motus, qui pro integra revolutione medius cenſeri poteſt, neglecta inclinatione lunaris orbitæ ad eclipticam; cum nodus regrediendo in plano eclipticæ redeunti Soli fiat obviam, erit $n dz - \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz$ motus omnis, quo Sol nodo ipſi fiet propior. At vero ſi motus Solis a nodo ſit $n dz - \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz$, & hæc quantitas in antecedenti termino, qui motum nodi exprimit, pro $n dz$ ſubſtituatur, fiet nodi motus $\frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz - \frac{9}{4} n^3 . \text{ſin. ATB}^4 . dz$, & motus, quo Sol nodo ipſi accedet, erit $n dz - \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin. ATB}^2 . dz + \frac{9}{4} n^3 . \text{ſin. ATB}^4 . dz$, ac repetitis ſemper operationibus motus omnis acceſſus Solis, ac no-

di

di erit $n\,dz\left(1 - \frac{1}{2}n \cdot \text{fin. ATB}^2 + \frac{3}{4}n^2 \cdot \text{fin. ATB}^4 - \frac{27}{4}n^3 \cdot \text{fin. ATB}^6 + \frac{81}{16}n^4 \cdot \text{fin. ATB}^8 \text{ \&c.}\right)$. Quod fi igitur juxta pofteriores formulas priorum lemmatum fummæ terminorum omnium accipiantur, fiet motus Solis duas inter Solis, & nodi conjunctiones $360°\left(1 - \frac{1}{4}n + \frac{27}{32}n^2 - \frac{135}{128}n^3 + \frac{2835}{2048}n^4 \text{ \&c.}\right)$, & motus nodi erit $360°\left(\frac{1}{4}n - \frac{27}{32}n^2 + \frac{135}{128}n^3 - \frac{2835}{2048}n^4 \text{ \&c.}\right)$ contra ordinem fignorum, ac denique hunc omnem motum augendo in ratione motus Solis ad differentiam motuum nodi, & Solis prodibit medius annuus nodi motus.

Corollarium I.

Cum fit $\frac{3}{4}n \cdot 360° = 20°\ 11\frac{1}{4}'$, atque, ob $n = 0.0748$ circiter, fit etiam $\frac{1}{4}n : \frac{27}{32}n^2 - \frac{135}{128}n^3 = 2139 : 163\frac{1}{3}$, erit primo motus medius annuus nodorum in hypothefi corollarii tertii problematis antecedentis ad æquationem ortam ex continuata nodi regreffione circiter ut $793 : 60$. Deinde fiet ipfa æquatio $360°\left(\frac{27}{32}n^2 - \frac{135}{128}n^3\right) = 1°\ 32'$, & motus nodi duas inter conjunctiones cum nodo evadet $18°\ 40'$, & altero etiam feriei termino fupputato $18°\ 39'$, & habita ratione inclinationis orbitæ $18°\ 35'$. Hoc dato erit motus Solis duas inter conjunctiones cum nodo ipfo $341°\ 25'$, & fi fiat ut $341°\ 25'$ ad $360°$ ita $18°\ 35'$ ad quartum, prodibit motus medius annuus nodorum Lunæ in orbita circulari $19°\ 35\frac{2}{3}'$.

Corollarium II.

Si juxta Coroll. II. Probl. VI. Lib. II. in pofteriori formula problematis fuperioris loco TL^2 fcribamus $1 - 4e \cdot \text{cof. } 2\text{LTA}$, in corollario fecundo ipfius problematis loco fin. LTD^2, feu cof. LTA^2 habebimus $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{cof. } 2\text{LTA}\right)\left(1 - 4e \cdot \text{cof. } 2\text{LTA}\right)$: & cum fit $\text{cof. } \overline{2\text{LTA}}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{cof. } 4\text{LTA}$, neglectis terminis, qui ambiguitate figni per totam circuli peripheriam fe mutuo deftruunt, medius nodorum motus, qui in circulari orbita haberetur, ob ellipticitatem orbitæ minuendus erit in ratione $1 - 2e : 1 = 1 - e : 1 + e$, five

in ratione semiaxis minoris ellipseos ad majorem, & posito $\phi = \frac{1}{138.8}$ fiet motus medius annuus nodorum $19^\circ\ 18^{\frac{1}{2}\prime}$.

Corollarium III.

Quod si insuper juxta Coroll. III. Probl. I. Lib. II. loco vectoris radii TL in ellipsi circa Terram veluti circa focum descripta scribamus $1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \phi.\text{cos}.cZ$, erit $1 + \phi^2$ quantitas constans quartæ potestatis ejusdem radii, atque ob excentricitatem orbitæ ellipticæ nodorum motus augendus erit in ratione $1 + \phi^2 : 1 = 1 : 1 - \phi^2$, sive in duplicata ratione semiaxis majoris ellipseos ad minorem, & posito $\phi^2 = 0.003$, fiet motus ipse annuus $19^\circ\ 23'$ circiter: quod cum observationibus satis accurate congruit.

Problema III.

Dato motu horario nodorum invenire variationem horariam inclinationis orbitæ.

Elevetur ex centro T circularis orbitæ, fig. 43., recta TO perpendicularis plano BLb, & radio vectori TL æqualis. Manifestum est angularem motum totius plani circa vectorem radium quemcumque æquari angulari motui rectæ TO. Jam vero arcus, quo nodus B in plano orbitæ Planetæ alterius retrocedit, se habet ad arcum alium, quem punctum prioris nodi, nutatione prioris plani BLb, describit circa radium TL, ut sinus totus ad sinum inclinationis orbitæ, sive ut $1 : \pi$, & posterior hic arcus se habet ad arcum Oo, quem eodem tepmore perpendicularis erectæ extremum O describit circa eumdem radium ut Bz : TO = LZ : TO. Quod si insuper sit MT radio LT, & VT lineæ nodorum BT perpendicularis, atque MR perpendicularis pariter rectæ VT; quia motus puncti O minimo quocumque tempore veluti rectilineus, & rectæ MT parallelus spectari potest, ipsius resolutione invenietur motus, qui parallele ad rectam TV, & circa lineam nodorum fiet, & quo augebitur, vel imminuetur orbitæ inclinatio. Cumque ob rectos angulos MTL, VTB anguli MTR, LTZ sint æquales; erit motus omnis puncti O ad motum, qui parallele ad rectam TR fiet, & quo planum BLb circa nodorum lineam Bb nutabit ut TM : TR = LT : TZ, & compositis rationibus erit horarius nodorum motus ad variationem horariam inclinationis ut LZ : π.TZ = sin. LTB : π. cos. LTB. Quare si juxta Probl. I. angularis motus nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ relatus ad signorum ordinem sit proxime

xime $- 3n^2 . TL^4 .$ fin. ATB. fin. LTB. fin. LTD. dz, erit variatio horaria inclinationis orbitæ $- 3n^2 . TL^4 .$ fin. ATB. fin. LTD. cof. LTB. πdz.

COROLLARIUM I.

Dum nodi Lunæ, aut Planetæ alterius regredientur in plano eclipticæ, minuetur orbitæ unius ad aliam inclinatio. Quod si perpendiculum demissum ex loco L in planum eclipticæ vocetur P, erit $\pi = \frac{P}{LZ}$, & angularis nodorum regressus ad imminutionem inclinationis orbitæ se habebit ut $LZ^2 : P.TZ$, atque ipsa angularis variatio æquabitur angulari nodorum motui, ubi LZ sit media proportionalis inter TZ, & perpendiculum idem P.

COROLLARIUM II.

Si nodi lunaris orbitæ quadrante integro a Sole distent, & sit fin. ATB $= 1$, erit juxta formulam Coroll. II. Probl. I. nodorum motus $- 3n^2 .$ fin. $LTB^2 . \sqrt{(1 - \pi^2)}\, dz$: & cum sit mótus hujusmodi ad variationem inclinationis habitam eodem tempore ut fin. LTB : π. cof. LTB, erit variatio eadem $- 3n^2\pi$. fin. LTB. cof. LTB. $\sqrt{(1 - \pi^2)}\, dz$: cumque insuper summa omnium fin. LTB^2 per totum quadrantem circuli sit $\frac{1}{4}p$, & summa omnium fin. LTB. cof. LTB sit $\frac{1}{2}$; summa horariorum omnium nodi motuum in Lunæ transitu a Solis quadratura ad syzigiam erit ad variationem inclinationis ut $\frac{1}{4}p : \pi$.

COROLLARIUM III.

Pariter cum juxta idem corollarium data Solis distantia a nodo sit motus medius horarius nodi ipsius
$- \frac{3}{2}n^2 .$ fin. $ATB^2 \sqrt{(1 - \pi^2 .}$ fin. $ATB^2). dz$, ac sit insuper fin. LTB $=$ fin. LTD. fin. ATB $\mp$ cof. LTD. cof. ATB, & cof. LTB $=$ cof. LTD. fin. ATB $\pm$ fin. LTD. cof. ATB; neglectis terminis qui in integro semicirculo DA d oppositione signorum cof. LTD destruuntur erit fin. LTB : π. cof. LTB $=$ fin. ATB : π. cof. ATB, dataque idcirco nodorum distantia a Sole erit in tota Lunæ revolutione variatio media inclinationis
$- \frac{3}{2}n^2\pi$. fin. ATB. cof. ATB. $dz = - \frac{3}{4}n^2\pi$. fin. 2ATB. dz.

COROLLARIUM IV.

Dato igitur nodorum loco erit variatio media inclinationis ut rectangulum sinus, & cosinus distantiæ Solis a nodis ipsis: nulla scilicet erit variatio si nodi sint in quadraturis Solis, aut in syzigiis :

&

& in octantibus nodorum variatio fiet maxima. Et quidem dum nodus ascendens lunaris orbitæ a syzigiis Solis tendet ad quadraturas minuetur orbitæ inclinatio, & deinde in reditu ad syzigias augebitur, ac singulis semirevolutionibus nodorum restituetur in gradum pristinum: summasque iterum accipiendo, ut in corollario tertio antecedenti, erit summa horariorum omnium nodi motuum ad variationem omnem inclinationis in toto nodorum transitu a Solis quadratura ad syzigiam in eadem ratione quadrantis circuli ad sinum mediæ inclinationis orbitæ.

COROLLARIUM V.

Denique cum summa omnium sinuum sit sinus versus per coefficientem variabilis anguli divisus, erit prior æquatio inclinationis orbitæ $-\frac{1}{8}n\pi.(1-\text{cos.}\,2ATB)$, scilicet ob vires Solis perturbatrices media inclinatio lunaris orbitæ ad eclipticam quantitate $\frac{1}{8}n\pi$ fiet minor quam esset sine ipsis viribus: & si π denotet sinum illius inclinationis, quæ vere est media, neglectis minoribus aliis correctionibus, erit sinus correctæ inclinationis $\pi+\frac{1}{8}n\pi.\text{cos.}\,2ATB$. Simili modo cum sit $-\frac{1}{2}n^2.\text{sin.}ATB^2.dz=-\frac{1}{4}n^2(1-\text{cos.}2ATB).dz$, erit prior æquatio medii nodorum motus $\frac{1}{8}n.\text{sin.}\,2ATB$, eruntque æquationes binæ nodorum motus, variationisque inclinationis orbitæ inter se in ratione composita sinus ad cosinum duplæ distantiæ Solis a nodis, & sinus totius ad sinum inclinationis.

PROBLEMA IV.

Iisdem positis motum Lunæ in sua orbita ad Eclipticæ planum reducere.

Sit in fig. 37. nodus B, locus Lunæ L, ac sit LF arcus circuli maximi transeuntis per L, & T perpendiculariter ad planum Eclipticæ Bab. In triangulo sphærico rectangulo BLF, ex sphæricorum elementis, erit sinus totus ad cosinum anguli LBF ut tangens arcus BL ad tangentem arcus BF, sive erit tang. BF $=$ cos. LBF . tang. BL, & differentia tangentium arcuum BL, BF erit $(1-\text{cos.}\,LBF).\text{tang.}\,BL$. Jam vero si π sit sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, & sit cos. LBF $=1-\frac{1}{2}\pi^2$, quia tangens differentiæ angulorum æqualis est differentiæ tangentium divisæ per summam quadrati sinus totius, & rectanguli tangentium earumdem, erit differentia tangentium

$$\frac{-\frac{1}{2}\pi^2.\text{tang.}\,BL}{1+(1-\frac{1}{2}\pi^2).\text{tang.}\,BL^2},$$ atque ob $\text{tang.}\,BL=\frac{\text{sin.}\,BL}{\text{cos.}BL}$, & $\text{sin.}\,BL^2+\text{cos.}\,BL^2=1$, fiet eadem differentia $\frac{-\frac{1}{2}\pi^2.\text{sin.}\,BL.\text{cos.}\,BL}{1-\frac{1}{2}\pi^2.\text{sin.}\,BL^2}$, seu

proxime $-\frac{1}{4}\pi^2.\sin.2BL$. Primo igitur si præcedentium correctionum ratione habita loco π scribamus $\pi+\frac{3}{8}n\pi.\cos.2ATB$, & loco $\sin.2BL$ scribamus $\sin.(2BL-\frac{1}{4}n.\sin.2ATB)$, resolutis de more terminis erit correcta tangentium differentia $-\frac{1}{4}\pi^2.\sin.2BL-\frac{3}{16}n\pi^2.\sin.2ATB$. Deinde vero si nodi motus ut antea sit pz, sive etiam pZ, & Lunæ motus $Z-\frac{2\varphi}{c}.\sin.cZ$, & sit $\sin.2BL$ $=\sin.(2Z+2pZ-\frac{4\varphi}{c}.\sin.cZ)$, hoc etiam termino de more resoluto fiet differentia omnis tangentium, quæ proxime est differentia veri motus Lunæ, & motus ad Eclipticam reducti

$$-\tfrac{1}{4}\pi^2.\sin.(2+2p).Z+\frac{\varphi\pi^2}{2c}.\sin.(2+2p+c).Z$$

$$-\frac{3}{16}n\pi^2.\sin.(2-2n).Z-\frac{\varphi\pi^2}{2c}.\sin.(2+2p-c).Z.$$

Corollarium.

Si loco quantitatem π, n, & $\frac{\varphi}{c}$ iidem numeri substituantur, qui supra, & unitatis loco accipiatur arcus 57.29578°, differentia motus Lunæ in sua orbita, & motus ad eclipticæ planum relati evadet

$$-6'\,57.5''.\sin.(2+2p).Z\quad+46''.\sin.(2+2p+c).Z$$
$$-\,23''.\sin.(2-2n).Z\quad-46''.\sin.(2+2p-c).Z:$$

atque ita motuum lunarium æquatio illa, quæ proprie variatio dicitur, quæque habet pro argumento duplam distantiam Lunæ a Sole, motibus ad eclipticæ planum relatis, fiet $23''$ minor, quam quæ esset in plano lunaris orbitæ.

Scholion.

Tribus prioribus capitis hujus problematis breviter perstrinximus plura theoremata Newtoni, Machinii, & Walmeslej, simulque etiam generalia exposuimus principia, quorum ope nodorum motus, & variatio inclinationis orbitæ in Planetis omnibus superioribus, atque inferioribus definiri potest. Machinius duo inprimis theoremata proposuerat: motum Lunæ mediocrem a nodo, dum nodi in quadraturis versantur, esse medium geometrice proportionalem inter motum mediocrem Lunæ, & motum illum, quo Luna in conjunctione cum Sole recedit celerrime a nodo: atque insuper motum mediocrem

Solis

Solis a nodo esse medium geometrice proportionalem inter motum mediocrem Solis, & motum illum mediocrem, quo Sol recedit celerrime a nodo in quadraturis. Quorum quidem theorematum prius illud, ob seriem celerrime convergentem, ad veritatem propius accedit, ut in Coroll. IV., & V. Probl. I. dictum est. Universim autem Lunæ, aut Solis motus, motus mediocris a nodo, & motus maximus in quadraturis Lunæ, aut Solis cum nodo ipso, sunt in progressione non geometrica, sed arithmetica. Ex ipsa medii motus formula facile admodum eruitur quæ summa horariorum omnium nodi motuum annis singulis esse debeat in hypothesi quod nodi horis singulis elapsis retrahantur in locum suum. Facile etiam potest colligi, ut in Coroll. I. Probl. II., motum nodi annuum in hac hypothesi ad æquationem ortam ex continuato regressu nodi se habere ut $793 : 60$ satis proxime: quam rationem tradiderat Newtonus in Propos. XXXII. Lib. III., quamque clarissimi Interpretes Newtoni le Seur, & Jacquier eleganter explicarunt in notis ad eamdem propositionem. In corollariis subsequentibus adjecimus quæ correctiones aliæ ob ellipticitatem, & excentricitatem orbitæ haberi debeant: in quo singulare est, quod cum correctiones ab ellipticitate orbitæ concentricæ pendentes exprimantur simplici differentia semiaxium, quæ pendent ex foci distantia a centro non nisi quadrato excentricitatis exprimuntur, neglectisque quadraticis potestatibus evanescunt: ut etiam directa methodo ostenderam in Propos. XIX., & XX. Lib. III. de Gravitate. Hunc autem propositionum earumdem sensum minus attendisse videtur D. Alembert To. III. Academiæ Taurinensis pag. 145.

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU NODORUM IN ALIIS ORBITIS.

Problema V.

INvenire motum nodorum, qui ob spæroidicam Primarii Planetæ formam in orbitis Satellitum haberi potest.

Sit BAb, fig. 37., Satellitis alicujus orbita, & referat Bab planum æquatoris, & T centrum Primarii Planetæ. Sit etiam Bb linea nodorum, & sinus inclinationis orbitæ ad planum æquatoris vocetur π, adeoque in puncto quocumque L sit $\pi . \frac{LZ}{LT}$ sinus deviationis Satellitis ab eodem plano. His positis si radius orbitæ Satellitis

litis vocetur a, & C sit semiaxis minor Planetæ ipsius Primarii, B vero differentia semiaxis majoris, & minoris, & radius ad peripheriam se habeat ut $1:p$, juxta illas formulas, quas in secunda Cosmographiæ parte de Planetarum figura differentes singulari methodo exponemus; in hypothesi partium homogenearum, Primarii attractio secundum LT exercita erit $\frac{2pC^2}{3a^2}.\overline{C+2B}+\frac{2pC^4B}{5a^4}.\overline{1-3\pi^2.\frac{LZ^2}{LT^2}}$: &, si deviatio orbitæ Satellitis ab æquatore Jovis exigua sit, ac deviationis quadratum possit negligi, erit $\frac{4p\pi}{5}.\frac{C^4B}{a^4}.\frac{LZ}{LT}$ illa attractionis pars, quæ perpendiculariter ad planum orbitæ exercebitur in puncto L: eruntque binæ vires inter se quam proxime ut $1:\frac{6\pi}{5}.\frac{CB}{a^2}.\frac{LZ}{LT}$. Sit igitur LO duplum spatii, quod viribus plano orbitæ perpendicularibus absolvi posset quo tempore Satelles absolvit arcum Ll, & juxta Probl. I. libri hujus sit nodorum motus inde ortus $\frac{LZ.LO}{\pi.Ll}$.

Eadem methodo Coroll. II. Probl. II. Lib. II. eruetur $LO=\frac{6\pi}{5}.\frac{CB}{a^2}.\frac{LZ.Ll^2}{LT^2}$, & si angularis motus Satellitis sit dz, erit angularis nodorum motus, qui ex sphæroidica Primarii Planetæ forma orietur $\frac{6}{5}.\frac{CB}{a^2}.\frac{LZ^2}{LT^2}.dz$.

Corollarium I.

Si loco $\frac{LZ^2}{LT^2}$ scribamus $\frac{1}{2}$ fiet singulis Satellitis revolutionibus nodorum motus $\frac{3}{5}.\frac{CB}{a^2}.360°$: & si fiat $\frac{C}{a}=\frac{1}{60}$, $\frac{B}{C}=\frac{1}{230}$ prodibit motus nodorum Lunaris orbitæ, qui in hypothesi Terræ sphæroidicæ, & homogeneæ singulis Lunæ revolutionibus haberi posset. Is scilicet ne ad secundum quidem unum ascendet: unde etiam si aliæ interni telluris textus hypotheses assumantur, nihil orietur, quod præ actione Solis in Lunam considerari debeat.

Corollarium II.

Contra in Satellitibus Jovis nodorum motus, qui ex sphæroidica Jovis figura orietur, longe erit major quam qui pendet ex mutuis

actionibus Satellitum. Nam si fiat $\frac{C}{a} = \frac{1}{9.017}$, & $\frac{B}{C} = \frac{1}{12}$, motus nodorum secundi Satellitis anno integro, sive 105 ipsius Satellitis revolutionibus, erit $23\frac{1}{4}°$. In aliis Satellitibus nodorum motus revolutionibus singulis erit in ratione duplicata reciproca radiorum orbitæ: & annis singulis erit motus nodorum tertii Satellitis $4\frac{1}{2}°$, quarti $\frac{3}{4}°$ circiter. Motus annuus nodorum orbitæ primi Satellitis esset plusquam 123° nisi orbita in eodem plano æquatoris Jovis jaceret.

COROLLARIUM III.

Si differentia semiaxium Jovis ad minorem semiaxem se habeat ut 1 : 14, fiet circiter 20° annis singulis motus nodorum orbitæ secundi Satellitis in plano æquatoris Jovis: & si intelligamus densitatem materiæ, quæ circa æquatorem Jovis extra inscriptam sphæram redundat, duplo minorem esse quam quæ in hypothesi homogeneitatis Jovis haberetur, duplo minor statuenda erit vis omnis æquatori perpendicularis, quæ ex sphæroidica Jovis figura orietur, & motus nodorum annuus erit dumtaxat 10°. Quod si insuper orbitæ primi, & tertii Satellitis ab æquatore ipso parum recedant, & conjunctis utriusque actionibus 2° circiter tribuamus; erit motus omnis nodorum secundi Satellitis 12° annis singulis, & tota variatæ inclinationis periodus 30 annis absolvetur, ut initio libri hujus attigimus.

PROBLEMA VI.

Invenire motum nodorum orbitæ Satellitis, aut Planetæ alicujus inferioris in plano superioris alterius orbitæ.

Positis omnibus ut in fig. 37., si L referat inferioris, S superioris Planetæ locum, & sit ut antea angularis nodorum motus $\frac{LZ.LO}{\pi.TL.Ll}$, ac fiat $ST = a$, $TL = b$, $TM = t$, neglectoque quadrato sinus inclinationis orbitæ juxta Coroll. II. Probl. II. Lib. II. sit $LO = \frac{a\pi.TL.Ll^2.\text{fin}.ATB}{M(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi.TL.Ll^2.\text{fin}.ATB}{Ma^2}$, ac denique juxta Coroll. II. Probl. I. libri hujus pro $\frac{LZ}{TL}$, sive fin. LTB scribamus fin. LTD. fin. ATB, fiet motus nodorum orbitæ BLb in plano orbitæ a Planeta S circa T descriptæ

$\text{fin}.ACB^2.\text{fin}.LTD.\frac{LT.Ll.}{M}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^2}\right)$. Quod

si insuper loco $\frac{Ll}{LT}$ scribamus dz, & $\frac{t}{b}$ loco sin. LTD, fractionem omnem in seriem evolvendo ut in Probl. VIII. Lib. II. factum est, negligendoque terminos, in quibus exponens x est imparis dimensionis, quique in adversis locis ambiguo signo se destruunt; motus idem æquabitur quantitati sin. $ACB^2 . \frac{dz}{M}$ ductæ in $\frac{3bt^2}{a^3}$ —

$$\frac{15b^3t^2}{2a^5} + \frac{35bt^4}{2a^5} + \frac{105b^5t^2}{8a^7} - \frac{315b^3t^4}{4a^7} + \frac{693bt^6}{8a^7}.$$

Quod si igitur juxta Lem. IX. prioris libri quantitates mediæ accipiantur, dato loco Planetæ superioris, erit motus nodorum orbitæ alterius inferioris $\frac{3b^3 \text{sin.} ACB^2 . dz}{2Ma^3}\left(1 + \frac{15b^2}{8a^2} + \frac{175b^4}{64a^4}\right)$. Denique si alii, atque alii nodorum, & superioris Planetæ aspectus se excipiant, pro sin. ACB^2 scribendo rursus $\frac{1}{2}$, ac pro radio inferioris orbitæ b accipiendo unitatem, fiet vere medius nodorum motus $\frac{3dz}{4Ma^3}\left(1 + \frac{15}{8a^2} + \frac{175}{64a^4}\right)$.

Corollarium I.

Si definiendus sit motus nodorum orbitæ Jovis, qui ex attractione Saturni oritur, & sit Saturni massa 303 posita Solis massa 1000000, ac fiat $dz = 360°$, aliique numeri ut antea substituantur, evadet primus seriei terminus $\frac{3 \cdot 360°}{4Ma^3} = 51\frac{1}{2}''$: qui cum ad secundum se habeat circiter ut 1805 : 1014, & secundus ad tertium ut 5415 : 236, addendo 29'', & 13'' erit una Jovis revolutione nodorum motus $93\frac{1}{2}''$. Si quartus etiam seriei terminus $\frac{3 \cdot 360°}{4Ma^3} . \frac{3675}{1024a^6}$ supputaretur, motus nodorum Jovialis orbitæ in plano orbitæ Saturni fieret singulis Jovis revolutionibus $98\frac{1}{2}''$, & annis singulis fere 9''.

Corollarium II.

Similibus substitutionibus motus intersectionum eclipticæ in plano orbitæ Saturni eruetur 23''' annis singulis, & integro sæculo 38''. Pariter si massa Jovis sit 937, prodibit motus annuus eorumdem nodorum eclipticæ in plano orbitæ Jovis 6'' 57''', &

ſæcularis motus $11' \, 35''$. Motus etiam annuus nodorum Martis, & Veneris in plano orbitæ Jovis prodibit $16''$, & $4''$. Hi motus omnes fixarum reſpectu cum ſint retrogradi, cumque annis ſingulis puncta æquinoctialia regrediantur $50.3''$, fiet annua progreſſio nodorum orbitæ Jovis cum plano orbitæ Saturni, atque orbitarum Martis, & Veneris cum orbita Jovis reſpectu punctorum æquinoctialium $41\frac{1}{3}''$, $34\frac{1}{3}''$, & $46\frac{1}{3}''$.

Corollarium III.

Cum in duobus Jovis Satellitibus ordine ſe conſequentibus radii orbitarum ſint proxime inter ſe ut $5:8$, fiet integra uniuſcujuſque Satellitis revolutione nodorum motus $\frac{141.724^\circ}{M}$ circiter: & ſi materiæ quantitates in ſecundo, tertio, & quarto Satellite ſint 0.000022, 0.00007, 0.0002, erit in primo, ſecundo, & tertio Satellite nodorum motus ſingulis revolutionibus $0.19'$, $0.595'$, $1.7'$: & anno integro, ſive revolutionibus 105 ſecundi Satellitis, tertii vero 51, erit motus nodorum ſecundi Satellitis in plano orbitæ tertii $1^\circ \, 2'$, & tertii motus in plano orbitæ quarti $1^\circ \, 27'$.

Problema VII.

Invenire motum nodorum orbitæ Planetæ ſuperioris in plano orbitæ inferioris alterius Planetæ.

Si Planeta quiſpiam ſuperior perturbetur ab inferiore, & ſit Planetæ ſuperioris motus dz, ſimili modo eruetur motus nodorum orbitæ ſuperioris ſin. $ACB^2 . \frac{bt.dz}{M} \left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \right)$.
Hæc autem fractio ſi ita in ſeriem evolvatur ut radius orbitæ Planetæ attracti denominatores, & Planetæ attrahentis diſtantia a centro numeratores ſeriei afficiat, ut in Probl. XII. Lib. II. factum eſt, neglectis terminis ſeſe invicem ambiguitate ſigni deſtruentibus fiet idem nodorum motus ſin. $ACB^2 . \frac{a^2 dz}{M} \left(\frac{3t^2}{b^4} - \frac{15a^2t^2}{2b^6} + \frac{35a^2t^4}{2b^8} + \frac{105a^4t^2}{8b^8} - \frac{315a^4t^4}{4b^{10}} + \frac{693a^4t^6}{8b^{12}} \right)$. Quod ſi inſuper pro t^2, t^4, t^6 valores medii ſubſtituantur, dato Planetæ inferioris loco, erit medius nodorum eorumdem motus $\frac{3a^2.\text{ſin.}ACB^2.dz.}{2Mb^4} \left(1 + \frac{15a^2}{8b^2} + \frac{175a^4}{64b^4}\right)$.

De-

Denique pro ſin. ACB² ſcribendo rurſus $\frac{1}{2}$, unitatem vero pro radio b, erit pro aſpectu quolibet Planetarum, nodorumque inter ſe motus vere medius nodorum orbitæ ſuperioris, qui ex inferioris actione orietur $\frac{3a^2 dz}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{8}+\frac{175a^4}{64}\right)$, & quarto etiam ſeriei termino ſupputato fiet motus ipſe nodorum ſingulis ſuperioris Planetæ revolutionibus

$$\frac{3a^2 . 360°}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{8}+\frac{175a^4}{64}+\frac{3675a^6}{1024}\right).$$

Corollarium I.

Si quantitas materiæ in Venere ad quantitatem materiæ Solis ſe haberet ut 1 : 169282, eſſet motus annuus nodorum eclipticæ in plano orbitæ Veneris $= 168\frac{1}{2}''' + 155''' + 110\frac{3}{4}''' + 71''' = 8''\ 25'''$: & ſi Veneris, ac Terræ maſſæ æquales eſſent inter ſe, atque ad maſſam Solis ſe haberent ut 326 : 100000000, fieret motus ipſe annuus $4\frac{2}{3}''$. Eſſet pariter regreſſio annua nodorum orbitæ Saturni in plano Jovialis orbitæ fixarum reſpectu $17\frac{2}{3}''$: reſpectu autem punctorum æquinoctialium progrederentur nodi ipſi annis ſingulis $32\frac{2}{3}''$.

Corollarium II.

Data etiam quantitate materiæ Satellitum inferiorum ſimili modo nodorum motus in orbitis ſuperioribus determinari poterit. Ita ſi ſecundo Satellite ad primum relato fiat $a = \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{M} = 0.00007$, erit 0.774 nodorum motus, qui ſingulis ſecundi ipſius Satellitis revolutionibus prioris actione habebitur, & annis ſingulis erit 1° 21′: conjunctiſque primi, & tertii Satellitis actionibus erit annuus nodorum motus 2° 23′, atque ut nodorum, & totius orbitæ nutatio annis 30 abſolvatur 9° 37′ ſupererunt annis ſingulis, quæ ſphæroidicæ Jovis formæ tribui debeant.

Corollarium III.

Patet autem ex aliis formulis præcedentibus quantitatem motus nodorum, quæ ex Solis actione oritur, ſenſibilem non eſſe. Sicuti enim ſingulis Terræ circa Solem revolutionibus motus nodorum Lunæ ob vim Solis eſt $\frac{3}{4}n . 360°$ poſito quod $n : 1$ ſit ratio periodicorum temporum Lunæ, & Terræ; ita ſi $t : T$ ſit ratio periodicorum temporum Satellitis cujuſpiam, & Jovis erit $\frac{3t}{4T} . 360°$ motus no-

nodorum orbitæ Satellitis singulis Jovis revolutionibus, & annis singulis fiet $\frac{3t}{4T^2}.360°$. Scilicet motus medius annuus nodorum in Luna, & Satellite quovis Joviali erit in ratione composita ex duplicata periodicorum temporum Jovis, & Terræ circa Solem, atque ex simplici temporum revolutionis Lunæ, & Satellitis: ac fiet in quarto Satellite annis singulis 5.04', & integro sæculo 8° 24'.

PROBLEMA VIII.

Dato motu nodorum eclipticæ in plano orbitæ Planetæ alterius invenire motum punctorum æquinoctialium in plano Eclipticæ.

Sit in fig. 43. Bb linea nodorum, & B nodus ascendens eclipticæ in plano orbitæ Planetæ alterius, Aa intersectio eclipticæ, & æquatoris, ac solstitiorum linea sit Dd. Manifestum est ex jam dictis, quod dum Terra est in loco L, atque alterius Planetæ actione tota ipsius orbita BLb circa vectorem radium LT inclinatur, arcus, quo nodus ascendens B retrocedit in plano orbitæ Planetæ alterius, se habet ad arcum alium, quem punctum prioris nodi circa radium LT describit ut sinus totus ad sinum inclinationis duarum orbitarum, sive ut $1:\pi$. Patet etiam arcum hujusmodi esse ad arcum, quem punctum A describit circa eumdem radium, ut Bz, sive LZ ad NT, sive ad $\frac{BX.TZ - LZ.TX}{LT}$. Quare compositis rationibus, & neglecto termino BX.TZ, qui in semicirculo BLb ambiguitate signi destruitur; motus nodi ascendentis B in plano orbitæ Planetæ alterius erit ad arcum, quem punctum A circa radium quemcumque LT describit, ut $LZ:\pi.NT = LT:-\pi.TX$. Hoc autem motu, & nutatione eclipticæ alia fiet intersectio eclipticæ, & æquatoris: & quia arcus a punctis æquinoctialibus A, a circa radium quemcumque LT descriptus perpendicularis est plano eclipticæ, se habebit ipse ad arcum alium, quo puncta eadem æquinoctialia regredientur in plano eclipticæ, ut tangens obliquitatis eclipticæ ad sinum totum. Itaque motus nodorum B, b in plano orbitæ Planetæ alterius erit ad motum punctorum æquinoctialium A, a in plano eclipticæ ut $LT:-\pi.TX$, & tangens obliquitatis eclipticæ ad sinum totum.

COROLLARIUM I.

Si nodus ascendens B sit inter punctum æquinoctii verni A,

&

& puncta solstitialia D, d, positiva erit TX, & puncta æquinoctialia, actione Planetæ alterius, contrariam habebunt directionem cum nodo B, & ferentur juxta ordinem signorum: regredientur vero puncta eadem, & communem habebunt directionem cum nodo B si TX fiat negativa, & nodus ascendens B reperiatur puncta inter solstitialia, & punctum æquinoctii autumnalis. Et quidem in primo casu minuetur præcessio annua æquinoctiorum, quæ ex Sole, ac Luna oritur, atque ita Solaris anni tempus augebitur, & contrarium accidet in casu altero.

Corollarium II.

Cum nodi ascendentes orbitarum Jovis, & Saturni sint modo in signo Cancri, ut supra observatum est, actione ipsius Jovis augebitur præcessio annua æquinoctiorum: & cum nodi iidem ascendentes a puncto solstitii æstivi e plaga æquinoctii autumnalis distent singuli $7\frac{1}{2}°$, & $21° 13'$, manentibus omnibus ut in Coroll. II. Probl. VI., & posita obliquitate eclipticæ $23° 28\frac{1}{3}'$, & inclinatione orbitæ Jovis ad planum eclipticæ $1\frac{1}{3}°$, Saturni vero $2\frac{1}{2}°$, punctorum æquinoctialium regressio in eodem plano ob vim Planetæ utriusque erit integro sæculo $6''$ circiter.

Corollarium III.

Si quantitas materiæ in Venere eadem esset quæ in Terra, positis omnibus ut in Coroll. I. Probl. VI., cum inclinatio orbitæ Veneris ad eclipticam sit $3° 23\frac{1}{3}'$, & nodus ascendens sit fere in gradu quartodecimo Geminorum, & a puncto solstitii distet fere $16°$, esset fere $18''$ sæcularis progressio punctorum æquinoctialium, quæ ob vim Veneris gignl posset. Itaque compositis Veneris, Jovis, & Saturni actionibus præcessio æquinoctiorum integro sæculo $12''$ circiter erit minor, quam qnæ Solis, & Lunæ viribus respondet: quo dato Solaris anni, & siderei differentia $3''$ temporis fieret major, quam si præcessio ipsa æquinoctiorum annis singulis esset $50.3''$.

Problema IX.

Dato motu nodorum orbitæ Satellitis unius Jovialis in plano alterius Satellitis invenire motum nodorum in plano Jovialis orbitæ.

Referat aB in fig. 42. planum orbitæ a Jove descriptæ circa Solem, & sit ACBQ orbita unius Satellitis, qui actione Satellitis alterius in plano altero cCQ moti perturbetur. Arcus exiguus, quo orbitarum duarum nodus C regredietur in plano cCQ, erit ad ar-

arcum, quem interim punctum C describet circa vectorem radium AT ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis AC*c*. Insuper arcus bini a punctis C, & B ejusdem orbitæ ACB circa eumdem radium AT simul descripti inter se erunt ut sinus arcuum AC, & AB: ac tandem arcus descriptus a puncto B erit ad motum nodi orbitæ ACB in plano *a*B ut sinus anguli AB*a* ad sinum totum. Itaque compositis rationibus motus nodi orbitæ ACB in plano alterius Satellitis *c*CQ erit ad motum nodi B in plano Jovialis orbitæ ut fin. AC. fin. AB*a*: fin. AB. fin. AC*c*: & cum sit fin. AC $=$ fin. AB. cof. CB $\mp$ cof. AB. fin. CB, neglectis terminis, qui in tota utriusque Satellitis revolutione ad invicem debent destrui, fiet eadem motus utriusque ratio cof. CB. fin. AB*a*: fin. AC*c*. Denique cum orbitæ *c*CQ Satellitis attrahentis ad planum Jovialis orbitæ minor sit inclinatio, quam orbitæ alterius ACB; nodi C, & B ferentur in partem adversam illi, in quam motus Satellitis dirigitur. Contra vis perpendicularis orbitæ *c*CQ, quæ a Satellite alio exercetur, in partem adversam tendet quam quæ exteriorem orbitam ACB perturbat: adeoque orbita eadem *c*CQ circa vectorem radium *c*T ita inclinabitur, ut dum nodus C regredietur in plano orbitæ ACB nodus Q progredietur in plano orbitæ Jovis *a*B, & bini pariter hi motus inter se erunt ut cof. CQ. fin. *c*B*a*: fin. AC*c*.

COROLLARIUM.

Cum inclinatio orbitæ quarti Satellitis sit $2°\,24'$, cujus sinus est circiter pars radii $\frac{1}{25}$, inclinatio media orbitæ tertii $3°\,1'$, cujus sinus $\frac{1}{20}$ circiter, & differentia inclinationis $37'$, cujus sinus $\frac{1}{100}$; nodi orbitæ tertii Satellitis regredientur in planis orbitarum quarti Satellitis, & Jovis, atque erunt motus ipsi inter se fere ut cof. CB : $\frac{1}{5}$: & contra nodi orbitæ quarti Satellitis, dum regredientur in plano orbitæ tertii, progredientur in plano Jovialis orbitæ, & angularis regressio in plano illo ad angularem nodorum progressum in plano orbitæ Jovis se habebit fere ut cof. CQ : $\frac{1}{4}$.

SCHOLION.

Motum medium nodorum orbitæ in Planetis omnibus, ac Satellitibus superioribus, atque inferioribus eadem methodo investigavimus, qua pro lunari orbita usi sumus, inquirendo scilicet motum, qui dato loco Planetæ attrahentis pro singulis Planetæ alterius re-

revolutionibus est medius, ac deinde ex mediis motibus omnibus hujusmodi excipiendo motum vere medium pro qualibet duarum orbitarum distantia a nodis, & a se invicem. Quæ quantitatum mediarum methodus, ut eam To. II. Dissertationum Luccæ editarum, & To. V. Comment. Bononiens. par. 1. pag. 231. explicavimus, huc redit, quod cum perturbatio motus alicujus Planetæ exprimitur serie aliqua, quæ potestates varias complectitur cosinus distantiæ unius ab alio, cumque æquationes tantum periodicæ quæruntur, quæ scilicet supersunt post singulas revolutiones; varias potestates cosinus resolvendo in series alias, quæ cosinum ejusdem anguli semel, bis, ter &c. sumptum contineant, neglectis terminis, qui signorum oppositione singulis revolutionibus compensant se se invicem, ac destruunt, solæ excipi debent quantitates, quæ sunt constantes, primi scilicet termini potestatum ordine parium $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ &c. Hac autem methodo facile, ac breviter eosdem fere numeros obtinuimus, quos Eulerus rationes alias secutus jam antea invenerat. Ipse enim §. 87. & 90. dissertationis de inæqualitatibus Jovis, & Saturni motum annuum nodorum orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis statuit 18'', nodorum orbitæ Jovis in plano orbitæ Saturni 10'', & orbitarum Martis, & Veneris in plano orbitæ Jovis 36'', & 46'': ac deinde §. 22. dissertationis de variationibus obliquitatis Eclipticæ, quæ in Actis Berolinensibus anni 1754. legitur, motum annuum nodorum Eclipticæ cum orbitis Saturni, & Jovis definivit 22''', & 6'' 57'''. Theorema quod in Coroll. III. Probl. VIII. pro supputando nodorum motu, qui in orbitis Satellitum Jovialium ex Solis actione oritur, tradidimus, illud ipsum est quod proposuerat Newtonus in Probl. V. Lib. III., & quod minus accurate expressum censuerat D. Bailly in priori parte Theoriæ Satellitum Jovialium.

CAPUT TERTIUM.

DE ECLIPTICÆ, ALIARUMQUE ORBITARUM OBLIQUITATE.

PROBLEMA X.

DAto motu nodorum orbitæ alicujus Planetæ superioris, vel inferioris in plano orbitæ Planetæ alterius invenire variationem mediam inclinationis.

Cum in orbita proxime circulari BLb, fig. 37., motus angularis nodorum B, & b, juxta Coroll. III. Probl. III. se habeat ad variationem inclinationis ut sinus totus ad sinum totius inclinationis, & sinus ad cosinum distantiæ Planetæ attrahentis a nodis ipsis, sive ut sin. ATB : π. cos. ATB; si Planeta attrahens sit superior, & juxta Probl. V. nodorum motus ad signorum ordinem relatus in inferiori orbita sit

$-\frac{3.\,\text{sin.}\,ATB^2.\,dz}{2Ma^3}\left(1+\frac{15}{8a^2}+\frac{175}{64a^4}\right)$, dato superioris Planetæ loco, erit variatio inclinationis orbitæ

$-\frac{3\pi.\,\text{sin.}\,ATB.\,\text{cos.}\,ATB.\,dz}{2Ma^3}\left(1+\frac{15}{8a^2}+\frac{175}{64a^4}\right)$: ac dato pariter inferioris Planetæ loco, juxta Probl. VII., erit variatio inclinationis orbitæ superioris

$-\frac{3\pi a^2}{2M}.\,\text{sin.}\,ATB.\,\text{cos.}\,ATB.\,dz\left(1+\frac{15a^2}{8}+\frac{175a^4}{64}\right)$. Quia vero summa rectangulorum omnium sin. ATB . cos. ATB per integrum quadrantem circuli est $\frac{1}{2}$, & summam ipsam per quadrantem $\frac{1}{4}p$ dividendo fit $\frac{2}{p}$ valor medius rectanguli uniuscujusque; erit pro aspectu quolibet nodorum, Planetarumque variatio media inclinationis in inferiori orbita

$-\frac{3\pi dz}{pMa^3}\left(1+\frac{15}{8a^2}+\frac{175}{64a^4}\right)$, in superiori vero

$-\frac{3\pi a^2 dz}{pM}\left(1+\frac{15a^2}{8}+\frac{175a^4}{64}\right)$.

Corollarium I.

Generatim itaque in transitu Planetæ cujusque attrahentis a linea nodorum ad quadraturas minuetur orbium inclinatio in ratione composita sinus, & cosinus distantiæ Planetæ ipsius a nodis: ac deinde in Planetæ reditu ad lineam nodorum augebitur inclinatio iisdem gradibus, quibus antea imminuebatur, & continuis oscillationibus redibit in statum pristinum: & quo tempore Planeta attrahens a nodis recedit per datum angulum summa variationum omnium inclinationis erit in duplicata ratione sinus ejusdem anguli.

Corollarium II.

Orbitæ omnes Satellitum ad se invicem, & ad planum orbitæ circa

circa Solem a primario descriptæ accedent, & recedent alternis vicibus, eamdemque semper servabunt inclinationis mediæ quantitatem: & quidem in binis orbitis Satellitum variatæ inclinationis eadem erit periodus, qua semirevolutio nodi absolvetur: inclinatio autem orbitæ cujuscumque Jovis Satellitis ad planum Jovialis orbitæ singulis annis 6, & inclinatio Satellitum Saturni ad planum orbitæ circa Solem descriptæ a Saturno singulis annis 15 redibit in statum pristinum.

Corollarium III.

Motus nodorum orbitæ tertii Jovis Satellitis quarta parte revolutionis Jovis circa Solem fiet ob vim Solis $6\frac{3}{4}'$, & inclinationis variatio $11''$. Et cum vires perturbatrices sint ut quadrata temporum periodicorum, in aliis Satellitibus dato eodem tempore variatio eadem augebitur, aut minuetur in simplici ratione temporis periodici, & sinus inclinationis orbitæ: adeoque in quarto Satellite circiter duplo major, & in secundo circiter duplo minor erit, quam in tertio, & duplo adhuc minor in primo quam in secundo. Pariter cum quarta parte unius Saturni revolutionis, motus nodorum quinti Satellitis sit $\frac{1}{2}°$, & inclinatio orbitæ $13° 8'$, erit variatio inclinationis fere $1'$, & in aliis Satellitibus variatio in ratione jam dicta erit minor.

Problema XI.

Dato motu nodorum eclipticæ in plano orbitæ alicujus Planetæ invenire variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Referat jam BLb, fig. 43., planum eclipticæ, & sit TO axis plano ipsi perpendicularis in centro T, ac sit insuper Bb plani intersectio cum orbita Planetæ alterius superioris, vel inferioris. Manentibus reliquis ut in Probl. VII., motus nodi ascendentis B in plano orbitæ Planetæ alterius erit ad motum puncti A circa vectorem radium quemcumque LT ut LZ : π. NT, adeoque ad motum poli eclipticæ O circa eumdem radium se habebit in ratione composita LT:π.NT, & NT:TO, sive in ratione simplici LT:π.TO. Hic autem poli motus, quam primum incipit, cum parallelus sit rectæ MT, quæ radio LT insistit ad rectos angulos, erit ad motum parallelum rectæ TK, quo axis eclipticæ, & planum omne circa rectam quamcumque Aa nutabit, ut MT:TK. Referat igitur recta Aa lineam æquinoctiorum, & Dd solstitiorum lineam, atque ob rectos angulos MTL, dTA æquales sint anguli MTd, LTA, & sit TK$=$LN. Quia insuper est LN $= \frac{LZ.BX + TZ.TX}{LT}$, neglecto

 po-

posteriore termino, qui in semicirculo BLb oppositione signorum cosinus TZ destruitur, dato quocumque tempore motus nodi ascendentis B in plano orbitæ Planetæ alterius erit ad motum totius eclipticæ circa æquinoctiorum lineam Aa, quo inclinatio eclipticæ, & æquatoris variabitur ut LZ : π. LN, sive ut LT:π.BX, sive demum in ratione composita sinus totius ad sinum inclinationis mediæ, & sinus totius ad sinum distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus.

Corollarium I.

Si nodus ascendens B sit in signis Borealibus eclipticæ, punctum idem eclipticæ, in quo est nodus, regredi non poterit in plano orbitæ Planetæ alterius nisi excurrendo Austrum versus, hoc est æquatori propius accedendo : contra vero si in signis Borealibus reperiatur nodus descendens, a quo scilicet Planeta ultra eclipticam versus polum Australem tendit, simili retrogradatione idem punctum eclipticæ recedet semper ab æquatore. Itaque in primo casu minuetur inclinatio eclipticæ, & æquatoris, atque augebitur in casu altero : & cum nodi ascendentes omnium Planetarum sint modo in signis Borealibus, actione omnium eclipticæ obliquitas fiet minor.

Corollarium II.

Cum igitur per Coroll. II. Probl. VI. nodi eclipticæ in plano orbitæ Jovis regrediantur integro sæculo $695''$, posita inclinatione Jovialis orbitæ ad eclipticam $1\frac{1}{3}°$, cujus sinus est 0.023269, & distantia nodi ascendentis ab æquinoctio verno $82\frac{1}{2}°$, cujus sinus est 0.99; erit sæcularis imminutio inclinationis eclipticæ ad æquatorem, quæ ex Jovis actione orietur, fere $16''$. Pariter cum sæcularis motus nodorum eclipticæ in plano orbitæ Saturni sit $38''$, & sinus inclinationis orbitæ sit 0.0436, ac nodus ascendens a puncto æquinoctii verni distet $66°\ 47'$, cujus sinus est 0.9322, erit $1\frac{1}{2}''$ circiter imminutio obliquitatis eclipticæ, quæ ob vim Saturni singulis sæculis habebitur.

Corollarium III.

Si quantitas materiæ in Venere eadem esset quæ in Terra, juxta Corollarium Probl. VI., evaderet $466\frac{2}{3}''$ sæcularis motus nodi ascendentis eclipticæ in plano orbitæ Veneris, & posita distantia ipsius nodi ab æquinoctio 74°, cujus sinus est 0.96, & sinu inclinationis orbitæ 0.059, fiet sæcularis imminutio inclinationis eclipti-

cæ

cæ ad æquatorem circiter $27\frac{1}{2}''$, & tota imminutio, quæ haberi poterit conjunctis simul Veneris, Jovis, & Saturni viribus, evaderet integro sæculo $45''$. Ea vero augebitur ob vim Martis, & major etiam esse poterit si quantitas materiæ Veneris statuatur major.

PROBLEMA XII.

Invenire limites imminutæ inclinationis eclipticæ ad æquatorem.

Quia dato quocumque tempore angularis motus nodorum eclipticæ in plano orbitæ Planetæ alterius cujuscumque est ad variationem inclinationis eclipticæ ad æquatorem ut $LT : \pi . BX$, si variationes omnes præ tota inclinatione media exiguæ sint, & quantitas π proxime constans assumi possit, erit variatio inclinationis ut motus nodorum habitus eodem tempore, & sinus distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus conjunctim. Et quia nodi omnium Planetarum, & puncta æquinoctialia fixarum respectu retrocedunt, respectu autem punctorum æquinoctialium nodi eclipticæ cum aliis Planetarum aliorum orbitis progrediuntur in consequentia signa eclipticæ, eodem nodo ascendente a puncto æquinoctii verni ad solstitium æstivum, ac deinde ad autumnale æquinoctium delato, primum minor, ac deinde major habebitur imminutio obliquitatis: ac nodo denique in australibus signis posito augebitur iisdem gradibus imminutio, quibus antea imminuebatur, & integra nodi revolutione restituetur in statum pristinum. Et quidem dum nodus B a puncto æquinoctii verni A recedet integro arcu AB erit totus nodorum motus ad variationem omnem obliquitatis ut summa omnium LT ad summam omnium $\pi . BX$, sive per Lem. IV. Lib. I. ut arcus AB ad $\pi . AX$. Itaque nodorum motus habitus eo tempore, quo nodi respectu punctorum æquinoctialium semirevolutionem unam absolvunt, ad variationem omnem inclinationis eclipticæ, & æquatoris se habebit in ratione composita semiperipheriæ ad diametrum, & sinus totius ad sinum mediæ inclinationis eclipticæ cum plano orbitæ alterius Planetæ superioris, vel inferioris.

COROLLARIUM I.

Cum nodus ascendens Jovialis orbitæ ab æstivo solstitio tendat ad autumnale æquinoctium, succedentibus sæculis ea variationis pars, quæ ex Jove pendet, imminui debet. Et cum sæcularis nodi ipsius motus in plano orbitæ Jovis sit fixarum respectu $695''$ in antecedentia, & respectu punctorum æquinoctialium sit $4335''$ in consequentia signa eclipticæ, ac fere sæculis 150 sit opus ut nodus ipse semi-

re-

revolutionem unam absolvat; binos angulos rectos minuendo primum in ratione $695''$: $4335''$, ac deinde in ratione diametri ad semiperipheriam, & sinus inclinationis eclipticæ, & orbitæ Jovialis ad sinum totum, fiet circiter $25'$ tota variatio obliquitatis eclipticæ, quæ actione Jovis haberi poterit in transitu nodi ascendentis ab uno ad alterum æquinoctium.

Corollarium II.

Pariter cum nodus ascendens Veneris ab æstivo solstitio distet e plaga æquinoctii verni, subsequentibus sæculis ea variationis pars, quæ ex actione Veneris pendet, augebitur. Et cum sæcularis motus nodorum eclipticæ in plano orbitæ Veneris sit $467''$ fixarum respectu, & respectu punctorum æquinoctialium $4563''$; simili calculo eruetur $42'$ circiter tota variatio, quæ actione Veneris, in hypothesi eadem massæ, haberi poterit. Quare conjunctis simul Jovis, & Veneris actionibus erit $1°\,7'$ limes imminutionis maximæ, ac maximi incrementi obliquitatis eclipticæ, & æquatoris.

Corollarium III.

At cum nodi ascendentes Veneris, & Jovis a se invicem distent quasi uno signo, & actione Veneris adhuc imminui possit eclipticæ obliquitas, dum actione Jovis augeri incipit, limes hujusmodi censeri poterit circiter unius gradus: scilicet nec nisi uno fere gradu major fuisse unquam potuit eclipticæ obliquitas quam modo est, nec nisi uno fere gradu minor potest unquam evadere. Falsum est itaque eclipticam fuisse aliquando æquatori perpendicularem, & ita ipsius obliquitatem minui ut cum æquatore demum congruere debeat, ac differentiam obliquitatis aut tantam fuisse olim, aut tantam fore aliquando ut tempestates anni sensibiliter a nostris diversæ aut fuerint, aut esse possint.

Corollarium IV.

Si motus nodorum orbitæ secundi Jovis Satellitis in planis orbitarum primi, & tertii, qui ex Jove simul, & Satellitibus iisdem gignitur, sit $12°$ annis singulis, & annorum 30 periodum habeat, colligetur simili modo inclinationem illius orbitæ augeri, & minui debere alternis vicibus: & quidem actione Jovis inclinatio singulis Satellitis semirevolutionibus restituetur in gradum pristinum: actione autem primi, & tertii Satellitis augebitur annis 15 inclinatio, ac deinde æqualibus gradibus minuetur. Et si motus nodorum orbi-

tæ

tæ tertii Satellitis in plano orbitæ quarti ſit tardior, imminutio, & augmentum inclinationis longiori periodo complecti poterit.

Corollarium V.

Denique ſi ſit 2° annis ſingulis, & ſemirevolutione una nodorum ſecundi Satellitis ſit 30° motus omnis, qui viribus Satellitis ſecundi, & tertii conjunctis gignitur, iſque imminuatur in ratione diametri ad peripheriam, ut prodeant $1146\frac{1}{2}'$; variatio inclinationis orbitæ ſecundi ipſius Satellitis in adverſas partes $30'$ eſſe poterit ſi ſinus inclinationis mediæ ſit 0.0253, ſeu ſinus circiter $1°\,27'$: eaque major aut minor eſſe poterit ſi plus, aut minus tribuatur aliorum Satellitum actioni, & inclinatio media aſſumatur major, aut minor. Et ſi ſit $1°\,27'$ annuus motus nodorum tertii Satellitis in plano orbitæ quarti, & inclinatio duarum orbitarum ſit $37'$, fiet maxima variatio annua inclinationis $0.936'$, & variatio mediocris annua $\frac{1}{3}'$ circiter eſſe poterit.

Scholion.

Jam itaque nutationis, librationiſque orbitæ phænomenon in ſingulis Satellitibus eo reduximus, ut data quantitate materiæ in Jove, & Satellitibus attrahentibus, variatæ inclinationis quantitas, & nodorum regredientium periodus in Satellite quocumque attracto ſupputari poſſit. Præcipuum autem phænomenon obliquitatis eclipticæ ab Arabum temporibus ad hanc uſque ætatem imminutæ pro dignitate, & elegantia argumenti diligenter explicavimus per partes ſingulas. Summa autem totius rei hæc ſunt capita: obliquitatem eclipticæ, Planetarum orbitis inter ſe poſitis ut modo ſunt, juxta aſſumptam hypotheſim quantitatis materiæ Veneris, tribus minuti unius quadrantibus ſingulis ſæculis imminui: imminutionis hujus duas eſſe potiores partes, quæ pendent ex Jove, ac Venere, eaſque eſſe proportionales ſinui recto diſtantiæ nodi aſcendentis Planetæ utriuſque a linea æquinoctiorum: variationis totius periodum eamdem eſſe, qua revolutio nodi complectitur, ut nodo a ſignis Borealibus ad Auſtralia tranſeunte obliquitas eclipticæ contraria ratione augeri debeat: limites denique imminutæ, auctæque obliquitatis intra unicum circiter gradum hinc illinc contineri. Theorematum priorum calculos alia ratione tradiderat Eulerus in diſſertatione de variationibus obliquitatis eclipticæ, quæ in actis Berolinenſibus anni 1754. impreſſa eſt. Theorema, & calculos limitum imminutæ, auctæque obliquitatis primo tradidimus in opere de univerſali corporum gravitate. Inde etiam quædam eruimus gra-

graviſſima corollaria. Falſum eſt, quod nonnulli authore Herodoto, atque ex veteri traditione Ægyptiorum aſſeruerunt, eclipticam fuiſſe olim æquatori perpendicularem: falſum eſt, quod Louvilleus in actis Lipſienſibus anni 1719. contendebat, eclipticæ obliquitatem ſingulis ſæculis integro minuto ita imminui, ut cum æquatore demum congruere debeat: atque inſuper falſum eſt, quod nonnulli ſuſpicabantur, variationem obliquitatis a veterum temporibus uſque nunc tantam fuiſſe, ut variæ terreſtris globi mutationes, ſi quæ ſint, colligi inde, atque explicari poſſint.

CAPUT QUARTUM.

DE ORBITIS CIRCA CENTRUM MOBILIBUS.

PROBLEMA XIII.

Data vi, qua corpus in ſpatio immobili datam orbitam deſcribit, invenire vim omnem, qua eamdem orbitam circa idem centrum virium revolutam poſſet deſcribere.

Volvatur corpus in orbe immobili ex A in L, fig. 44., & interim ob plani motum radius vector TL in locum Tl tranſeat, & quo tempore in orbe immobili deſcriberet arcum LM, vel lm, ob continuatum radii vectoris motum, feratur ad punctum t. Differentia virium in duobus orbibus erit vis omnis, qua circularis arcus mt deſcribitur. Continuetur arcus ipſe uſque ad n, & ſit pariter MN arcus radio TM deſcriptus, & velocitates perpendiculares radiis in orbe immobili, & mobili ſint inter ſe ut MN, ſive mn, ad tn. Inprimis ſi projectionis quantitas in unoquoque orbe data ſit, & areæ circa centrum deſcriptæ ſint proportionales temporibus, & perpendiculares velocitates utrobique ſint in ratione reciproca radiorum, eadem etiam utrobique erit ratio angulorum omnium deſcriptorum circa idem centrum, eritque MN : tn = ang. LTM : ang. lTt = ang. ATL : ang. ATl. Deinde quia in circulis eodem radio deſcriptis vires centripetæ ſunt inter ſe ut quadrata velocitatum, erit vis qua corpus circulari motu revolvi poſſet ex N in M, ad vim, qua arcum nt deſcriberet ut $MN^2 : nt^2$, & ad differentiam virium ſe habebit vis eadem prior ut $MN^2 : nt^2 - nm^2$ = ang. ATL^2 : ang. ATl^2 — ang. ATL^2. Denique vis illa, qua deſcribetur arcus mt, ſeu differentia virium centripetarum in orbe immobili, & mobili,

erit

erit directe ut quadratum velocitatis, & reciproce ut radius vector, sive erit reciproce ut cubus ipsius radii.

COROLLARIUM I.

Eadem igitur projecti alicujus semita efficietur mobilis, si velocitas radio vectori perpendicularis augeatur alicubi, vel minuatur in ratione data, & quantitas vis centripetæ, qua prior orbita in spatio immobili describebatur, augeatur pariter, vel minuatur in ratione eadem duplicata, atque insuper vis hæc addita, seu detracta pro aliis locis omnibus sit in ratione radii reciproca triplicata. Et quidem in priori casu vis additæ linea apsidum in eam feretur partem, ad quam projecti motus dirigitur, in casu autem altero retrocedet in adversam partem.

COROLLARIUM II.

Si corpus data velocitate projectionis, & data lege vis centripetæ curvam aliquam describat, ipsique accedat vis alia, quæ sit reciprote ut cubus distantiæ a centro, perget corpus ejusdem speciei curvam describere in eodem plano circa idem centrum revolutam. Semper enim velocitas perpendicularis radio intelligi poterit divisa in binas partes, quarum prior se habeat ad totam velocitatem in ratione subduplicata vis centripetæ, qua ipsius speciei curva in spatio immobili, eodemque radio vectore describi posset, ad vim totam.

COROLLARIUM III.

Et quia radius osculator orbitæ circa centrum revolutæ, in summa apside A, ubi projectionis directio vectori radio AT occurrit ad rectos angulos, æqualis est quadrato velocitatis diviso per vim omnem centripetam, vis autem, qua ad eamdem distantiam, eademque cum velocitate circulus describi posset, æqualis est quadrato velocitatis per radium AT diviso; vis, qua corpus urgeri debet in summa apside orbitæ mobilis, erit ad vim, qua circulus ad eamdem distantiam describi posset, ut distantia ipsa AT ad radium osculatorem orbitæ.

PROBLEMA XIV.

Data vi, quæ adjungitur gravitati in orbitis proxime circularibus, motum apsidum invenire.

Sit $p:q$ ratio velocitatum perpendicularium in orbita immobili, & mobili, atque in priori orbita vis centripeta sit

$\frac{p^2}{TL^2}$, adeoque orbita eadem fit ellipsis, & latus rectum principale ellipseos sit $2r$. Quia radius osculi ellipseos in vertice majoris axis est ipsum semilatus rectum principale, ac data projectionis velocitate vires centripetæ in summa apside sunt in ratione inversa radiorum osculi; si vis centripeta in summa apside ellipseos immobilis sit $\frac{p^2}{TA^2}$, erit $\frac{rp^2}{TA^2}$ vis, qua circulus ad eamdem distantiam, eademque ipsius ellipseos velocitate describi posset. Itaque differentia virium in ellipsi immobili, & mobili juxta superius problema erit $r.\frac{\overline{q^2-p^2}}{TA^3}$, ac posito $TL = Tl = x$, fiet in puncto quocumque l ellipseos mobilis vis omnis $\frac{p^2x+r.\overline{q^2-p^2}}{x^3}$. Statuamus eamdem orbitam describi posse vi $\frac{1}{x^2}+\varpi x^m$, vi scilicet gravitatis, quæ ad vim priorem in mediocri distantia se habeat ut $1:p^2$, & cui addatur, aut subtrahatur vis alia exigua ϖ, quæ sit ut radii vectoris potestas quæcumque m. Exæquatis terminis fiet
$p^2x+r.\overline{q^2-p^2} = x+\varpi x^{m+3}$: ac si insuper sit $TA = a$, $Tl = x = a - t$, & $x^{m+3} = a^{m+3} - \overline{m+3}.a^{m+2}t$, ob parvitatem differentiæ t neglectis aliis terminis minoribus, binæ primum pro loco quolibet, ac summa apside æquationes habebuntur, atque iis insuper a se invicem subductis tertia exsurget æquatio, videlicet

I. $p^2.\overline{a-t}+r.\overline{q^2-p^2} = a-t+\varpi a^{m+3}-\overline{m+3}.\varpi a^{m+2}t$

II. $p^2a+r.\overline{q^2-p^2} = a+\varpi a^{m+3}$

III. $p^2t = t+\overline{m+3}.\varpi a^{m+2}t$.

Quod si igitur orbita tam proxime ad circulum accedat ut pro quantitatibus a, & r unitas assumi possit, ex tertia æquatione eruetur $p^2 = 1+\overline{m+3}.\varpi$, ex secunda vero $q^2 = 1+\varpi$, eritque $q^2:p^2 = 1+\varpi : 1+\overline{m+3}.\varpi = 1:1+\overline{m+2}.\varpi$.

Co-

Corollarium I.

Si gravitati addatur vis aliqua, quæ sit directe ut potestas quævis distantiæ, hoc est si quantitas ϖ, & m positivæ sint, erit $q < p$, & apsides retrocedent in partem adversam illi, in quam Planetæ motus dirigitur. Idipsum continget si quantitates ϖ, & m simul negativæ sint, & sit $m > 2$. At si vis aliqua detrahatur gravitati, eaque sit directe proportionalis potentiæ alicui distantiæ, orbita circa centrum virium revoluta, eadem apsides Planetæ directione ferentur juxta ordinem signorum in consequentia.

Corollarium II.

Quia gravitati Lunæ in terram $\frac{1}{x^2}$, juxta Probl. III. Lib. II., demitur vis $\frac{1}{2} n^2 x$, eaque directe est ut Lunæ distantia a Terra, posito $\varpi = -\frac{1}{2} n^2$, & $m = 1$, erit $q^2 : p^2 = 1 : 1 - \frac{3}{2} n^2 = 1 + \frac{3}{2} n^2 : 1$, atque erit proxime $q : p = 1 + \frac{3}{4} n^2 : 1$, atque ubi p, sive angulus ATL sit $360°$, integra scilicet Lunæ revolutione fiet progressus apsidum ATC $= q - p = \frac{3}{4} n^2 . 360° = 1\frac{1}{2}°$ circiter, atque anno integro fere $20°$. In hac igitur orbitæ mobilis hypothesi, atque hisce approximationibus dimidio minor eruetur progressus apsidum quam ferant observationes.

Corollarium III.

Si manentibus cæteris denominationibus ut in Probl. V. sit $\frac{2pC^4B}{5a^4}$ vis, quæ oritur ex sphæroidica Jovis forma, quæque additur vi decrescenti in duplicata ratione auctarum distantiarum; posito in superiori formula $m = -4$, $\frac{2pC^2}{3a^2} . \overline{C + 2B} = 1$, $\varpi = \frac{2pC^4B}{5a^4}$, erit $q - p = \frac{3CB}{5a^2}$, & motus apsidum inde ortus singulis revolutionibus evadet $\frac{3CB}{5a^2} . 360°$: erit scilicet in singulis Satellitibus distantiarum quadratis reciproce proportionalis, & posito $\frac{B}{C} = \frac{1}{12}$, & $\frac{C}{a} = \frac{1}{25}$, fiet in quarto Satellite pro unaquaque circa Jovem revolutione $1.73'$, & anno integro $38'$.

COROLLARIUM IV.

Universim si gravitas sit x^l, & vis tota in centrum $\frac{x^{l+3} + \varpi x^{m+3}}{x^3}$, eadem calculi serie pro iisdem hypothesibus eruetur $q^2:p^2 = 1 + \varpi : l + 3 + \overline{m+3} \cdot \varpi$, ac substitutis numeris præsto erit quibus in casibus progredi, aut regredi debeant apsides. Et si fiat $\varpi = 0$, ac vi unica corpus urgeatur, quæ sit ut potestas quævis distantiæ, erit singulis revolutionibus $\frac{q}{p} = \frac{360°}{\sqrt{l+3}}$: nullus scilicet erit progressus apsidum posito $l = -2$, & posito $l = -3$, aut -4 &c., corpus ab apside una discedens nunquam ad apsidem alteram pervenire poterit.

PROBLEMA XV.

Data vi Lunæ in Terram, & vi mediocri perturbatrice Solis, invenire velocitatem, qua Luna juxta vectorem radium ascendit, vel descendit.

Sit orbita lunaris ALl, fig. 45., & omissis viribus omnibus perturbatricibus, quæ pendent ex varia Lunæ, & Solis, apsidum, nodorumque distantia inter se, quæque alias æquationes motus suppeditant, sit in loco L vis omnis, qua Luna in Terram impellitur $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} n^2 x$, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus, in summa apside A fiat $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2} n^2 a$. Sit insuper b semiaxis major, & φ excentricitas illius ellipseos, quæ circa focum T describeretur si vis omnis hujusmodi esset reciproce ut quadratum distantiæ. Quia vis centripeta ad vim centrifugam in summa apside ellipseos se habere debet reciproce ut radius osculi $\frac{b^2 - \varphi^2}{b}$ ad foci distantiam $b + \varphi$, sive directe ut $b : b - \varphi$, & quia insuper data projectionis velocitate, ac similiter omissis aliis perturbatricium virium æquationibus, ob æquales areas æqualibus temporibus descriptas, vis centrifuga esse debet reciproce ut cubus vectoris radii; fiet in loco quocumque L vis eadem $\frac{b-\varphi}{b} \cdot \frac{a}{x^3} (1 - \frac{1}{2} n^2 a^3)$. Et quia denique velocitas in elementum suum ducta æquatur vi acceleratrici du-

ctæ in elementum ſpatii; ſi velocitas deſcenſus, vel aſcenſus juxta vectorem radium concepta vocetur U, erit

$$U\,dU = \frac{dx}{x^2} - \tfrac{1}{2}n^2 x\,dx - \left(\frac{b-\varphi}{b}\right)\left(a - \tfrac{1}{2}n^2a^4\right).\frac{dx}{x^3}$$

$$\tfrac{1}{2}U^2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{4}n^2.(a^2 - x^2) - \left(\frac{b-\varphi}{b}\right)\left(a - \tfrac{1}{2}n^2a^4\right)\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2a^2}\right)$$

$$U^2 = \frac{1}{x^2}\left(2x - \frac{2x^2}{a} - \tfrac{1}{2}n^2.(a^2x^2 - x^4) - \left(\frac{b-\varphi}{b}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}n^2a^3\right)\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\right).$$

Sit igitur ut antea $a - x = t$, ac fiat propterea

$$2x - \frac{2x^2}{a} = 2t - \frac{2t^2}{a}$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2\left(a^2x^2 - x^4\right) = -n^2a^3t + \tfrac{1}{2}n^2a^2t^2$$

$$-\left(\frac{b-\varphi}{b}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}n^2a^3\right)\left(a - \frac{x^2}{a}\right) = -2t + \frac{2\varphi t}{b} + n^2a^3t - \frac{n^2\varphi}{b}a^3t$$

$$+\frac{t^2}{a} + \frac{\varphi t^2}{ab} - \tfrac{1}{2}n^2a^2t^2.$$

Collectis terminis hiſce omnibus habebitur

$$U^2 = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2\varphi - n^2\varphi a^3}{b}.t - \overline{\frac{1}{b} - 2n^2a^2}.t^2\right).$$

Corollarium I.

Si fiat $\frac{1}{b} - 2n^2a^2 = f^2$, & $\dfrac{\frac{\varphi}{b} - \frac{n^2\varphi a^3}{2b}}{\frac{1}{b} - 2n^2a^2} = g$, evadet $U = \frac{f}{x}\sqrt{(2gt - t^2)}$:

& ſi vires perturbatrices nullæ eſſent, & Luna in ellipſeos perimetro revolveretur, & gravitas in mediocri diſtantia, ut antea, exprimeretur unitate, poſito $\frac{1}{b} = f^2$, & $\varphi = g$, velocitas omnis deſcenſus juxta vectorem radium evaderet $\frac{1}{x}.\sqrt{(2\varphi t - t^2)}$.

Corollarium II.

Quia in ima apſide eſt tangens radio vectori perpendicularis, & evaneſcit velocitas deſcenſus, poſita $U = 0$, prodibit ſpatium omne deſcenſus in tranſitu a ſumma ad imam apſidem, ac fiet

$t =$

$t = \frac{2\phi - n^2\phi a^3}{1 - 2n^2 a^3}$, ſeu proxime $t = 2\phi + 3n^2\phi$, ac, poſteriori termino ob parvitatem neglecto, ſemidifferentia diſtantiæ maximæ, & minimæ a foco proxime æqualis erit excentricitati ellipſeos, quam Luna projecta ex ſumma apſide deſcriberet viribus decreſcentibus in duplicata ratione auctarum diſtantiarum, ac proxime etiam cenſeri poterit $b = 1$, & $a = 1 + \phi$.

Problema XVI.

Iiſdem poſitis invenire tempus, quo Luna ab una ad alteram apſidem pertranſit.

Sit in figura eadem ALla orbita, in qua Luna a ſumma apſide A ad imam tranſit, & ſit CA $= 2g$ differentia diſtantiæ maximæ TA, & minimæ Ta, & recta CA tamquam diametro deſcribatur ſemicirculus AOC, accipiaturque ſemper TL $=$ TH, & Tl $=$ Th, ac fiat AH $=$ TA $-$ TL $= t$, & H$h = dt$, ac denique in H, h erigantur ſemiordinatæ HO, ho. Quia velocitas Lunæ ſecundum radium TL eſt $\frac{f}{x}\sqrt{(2gt - t^2)}$, erit tempus deſcenſus per elementum radii LN, ſive erit tempus, quo Luna feretur ex L in $l = \frac{x\,dt}{f\sqrt{(2gt - t^2)}} = \frac{(a-g).dt}{f\sqrt{(2gt-t^2)}} + \frac{(g-t).dt}{f\sqrt{(2gt-t^2)}}$. Eſt autem elementum circularis arcus Oo $= \frac{g\,dt}{\sqrt{(2gt - t^2)}}$, atque ob HO $= \sqrt{(2gt - t^2)}$ eſt $\frac{(g-t).dt}{\sqrt{(2gt-t^2)}}$ elementum ſemiordinatæ circuli HO. Quare erit tempus, quo Luna elementum arcus Ll deſcribet $\left(\frac{a-g}{f}\right).\frac{Oo}{g} + d.\frac{HO}{f}$: & ſumma omnium hujuſmodi elementorum temporis erit $\left(\frac{a-g}{f}\right).\frac{AO}{g} + \frac{HO}{f}$: &, poſito HO $= o$, ſi radius ad peripheriam ſe habeat ut $1 : p$, & ſit ſemicirculus AOC $= \frac{1}{2}pg$; tempus omne, quo Luna ſpatio AC, ſeu $2g$ fiet propior orbitæ foco T, ſive quo a ſumma ad imam apſidem tranſibit, erit $= \frac{1}{2}p\left(\frac{a-g}{f}\right)$. Quod ſi igitur quantitates g, & f ex corollario primo ſuperioris problematis accipiantur, & juxta corollarium

alterum

alterum loco b accipiatur unitas, positis aliis denominationibus praecedentibus, fiet totum tempus reversionis Lunæ ad eamdem apsidem

$$\frac{p\left(1+\varphi-\frac{\varphi+\frac{1}{2}n^2\varphi a^2}{1-2n^2a^2}\right)}{\sqrt{(1-2n^2a^2)}}=\frac{p(1-2n^2a^2)}{(1-2n^2a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Corollarium I.

Si fiat $a = 1+\varphi$, erit tempus omne, quo Luna a loco summæ apsidis digressa ad eamdem revertetur

$$=p\,\frac{(1-2n^2.\overline{1+3\varphi})}{(1-2n^2.\overline{1+2\varphi})^{\frac{3}{2}}}=p\,\frac{(1-2n^2.\overline{1+3\varphi})}{1-3n^2.\overline{1+2\varphi}}=p.\overline{1+n^2}:$$

& si orbita assumatur proxime circularis, quæ scilicet vi mediocri $1-\frac{1}{2}n^2$ ad distantiam mediocrem 1 describi posset, & velocitas projectionis ea sit, quæ per dimidium radium cadendo eadem vi acquiri posset; fiet velocitas ipsa $\sqrt{(1-\frac{1}{2}n^2)}$, & tempus integræ revolutionis $\frac{p}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}n^2)}}=p.\overline{1+\frac{1}{4}n^2}$, eruntque tempora unius revolutionis, reversionisque ad eamdem apsidem inter se ut $1:1+\frac{3}{4}n^2$, ut ex priori etiam hypothesi ellipseos mobilis colligebatur.

Corollarium II.

Quod si binæ simul hypotheses combinentur ellipseos circa Terram veluti focum descriptæ viribus decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum, & ellipseos alterius concentricæ, in quam circularis orbita abire primum deberet ob Solis vim, & juxta formulam Probl. VII. Lib. II. sit medii temporis elementum $\frac{dz}{1-\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n^2.N}$; posito $N=\frac{1}{1-n}$, erit tempus revolutionis integræ $\frac{p}{1-\frac{1}{4}n^2+\frac{3n^2}{4-4n}}$, seu proxime $p.\overline{1-\frac{1}{2}n^2}$, & ad tempus reversionis ad eamdem apsidem se habebit ut $1-\frac{1}{2}n^2:1+n^2=1:1+\frac{3}{2}n^2$.

Corollarium III.

In hisce igitur hypothesibus esset medius progressus apsidum singulis Lunæ revolutionibus $\frac{3}{2}n^2.360°$, & annis singulis $\frac{3n}{2}.360°$,

sive

ſive 40 $\frac{2}{5}$°, quæ ab obſervationibus quantitas non multum diſcrepat. Et quia apogæi motus vi Solis mediocri genitus variari debet in eadem ratione vis perturbatricis, ſive in triplicata ratione diſtantiæ Solis reciproce, retentis iiſdem denominationibus, quæ in ſcholio Cap. II. Lib. II., erit medius apogæi motus ad motus medii æquationem ut $1 : -3\delta.\cos. mz$, & motus annuus ad æquationem totam ſe habebit ut $mz : -3\delta.\sin. mz$. Quare ſi ſit ut antea $\delta = 0.0168$, & annuus apogæi motus minuatur primum in ratione $3\delta : 1$, & deinde in ratione radii ad peripheriam; fiet maxima æquatio annua $-19' 26''$, & dato quocumque tempore erit æquatio medii apogæi motus $-19' 26''.\sin. mz$.

Scholion.

Theoriam motus apſidum explicare cœpit Newtonus in ſect. IX. Lib. I. Princip., & ab hypotheſi ſimpliciori orbitæ mobilis exorſus in Propoſ. XLIV. oſtendit differentiam duarum virium, quibus corpus in orbe immobili, & aliud corpus in orbe alio mobili circa centrum revolvi poteſt, eſſe in ratione triplicata reciproca diſtantiarum. Theorematis ejuſdem demonſtrationem in priori capitis hujus problemate breviſſimam attulimus, ac deinde in Problemate alio ſubſequenti nitidiorem effecimus calculum, quo Newtonus in Propoſ. XLV. motum apſidum inveſtigavit in hypotheſi virium agentium in quacumque alia ratione. Illo autem calculo cum motus apogæi Lunæ dimidius tantum prodeat, idcirco in Propoſ. III. Lib. III. Newtonus ut phænomenis motus apſidum ſatisfaceret cenſuit vim mediam perturbatricem Solis duplo majorem ſtatuendam eſſe quam ex actione periodicorum temporum colligatur. In ſcholio etiam theoriæ lunaris prioris editionis ſcriptum reliquerat vir certe maximus ſe motum medium annuum apogæi Lunæ ex theoria gravitatis eruiſſe circiter 40°: atque inveniſſe inſuper motum diurnum apogæi, cum in oppoſitione, vel conjunctione Solis verſatur, 23' in conſequentia, & $16\frac{1}{3}'$ in antecedentia cum apogæum ad quadraturas Solis pertranſit: computationes autem utpote nimis perplexas, & approximationibus impeditas apponere noluiſſe. Quæ cum in aliis operis editionibus omiſſa ſint, ſuſpicari poſſet Newtonum in iiſdem approximationibus minime ſibi ſatisfeciſſe. Aliunde vero manifeſtum eſt, quod cum ellipſeos motus circa focum haberi nequeat niſi viribus decreſcentibus in triplicata ratione auctarum diſtantiarum, cumque mediocris vis perturbatrix Solis ſit in ratione directa ſimplici diſtantiarum earumdem; latiores ſunt limites approximationum, quibus

bus

bus apogæi lunaris motus ex ea ellipseos mobilis hypothesi eruitur, quasque ideo tantum retulimus, ut ingeniosam methodum lector in nostro hoc opere minime desideraret.

In opusculo de legibus motuum lunarium se etiam motum medium annuum apogæi Lunæ 40° 40′ 40½″ ex legibus gravitatis eruisse dixit Machinius, atque indicavit insuper qua methodo in suis supputationibus usus esset: datis nimirum viribus perturbatricibus quæsivit ipse motum omnem accessus, aut recessus corporis a loco dato, nulla habita ratione angularis motus circa centrum ipsum concepti, atque inde supputavit tempus descensus corporis a summa ad imam apsidem. Methodum, quam Machinius indicaverat, assequi, & explicare aggressus est Walmeslejus in opusculo de motu apsidum Parisiis edito, & in theoria motuum lunarium, quæ postmodum Florentiæ edita est. Primo scilicet statuit ipse vires centrifugas lunaris orbitæ easdem esse, quæ in orbita elliptica, & proxime ad circulum accedente haberi possent: deinde accepit vim mediam perturbatricem, qua gravitas Lunæ in Terram pro distantiarum varietate imminuitur: ac denique ex datis viribus eruit velocitatem, qua Luna propius Terræ accedit, atque ex data velocitate supputavit tempus descensus a summa ad imam apsidem. Verum si leges corporum recta ad centrum descendentium, & circa centrum virium ellipsim, aut circulum describentium, accurate expendantur, ut in duobus problematis posterioribus factum est, & tempus integræ revolutionis assumatur idem qui in circulo ad distantiam mediam descripto, medius motus apsidum omnino idem prodibit, qui in hypothesi orbitæ mobilis haberetur. Id alia etiam ratione ostendit Eques clarissimus d'Arcy in opusculo Parisiis edito anno 1749. Eamdem hypothesim D. Clairaut ad supputandum apogæi lunaris motum adhibuit, ut scilicet ellipsim circa focum uniformiter mobilem ellipsi immobili, & circulari orbitæ substituendo, priores terminos seriei, quæ radium vectorem exprimit, accuratius exhiberet, ac deinde repetitis approximationibus, correctionibusque ad verum radii ipsius valorem propius accederet. Et cum priori approximatione Authori eidem, & summis aliis Geometris Eulero, & Alembertio, qui prorsus diverso tramite ad problematis solutionem processerant, apogæi motus dimidio minor prodierit, quam ferant observationes, & phænomenon jam videretur a gravitatis universalis, & mutuæ legibus aberrare; demum perductis longius seriebus, aliisque terminis scrupulosius supputatis leges ipsæ, ac phænomenon conciliari simul potuerunt.

Quid hacce in re disputatum sit, qua methodo alii processerint, quid adhuc simplicius, aut nitidius desideretur, singillatim exponere minime hic nostra interest. Antequam apogæi lunaris motum directe, & accurate supputemus, in posterioribus capitis hujus corollariis indicare voluimus, quo approximationis genere hypothesis orbitæ mobilis cum observationibus astronomicis posset conciliari. Simpsonius in Miscellaneis præcipuum hypotheseos, & methodi ipsius defectum jam indicaverat, quod scilicet a Machino, & Walmeslejo nulla habita sit ratio virium normaliter ad vectorem radium agentium, quæ perturbant æquabilem descriptionem arearum, & quibus motus juxta tangentem orbitæ acceleratur, aut retardatur. Ut enim positis aliis denominationibus antecedentibus tempus periodicum sit $\frac{p}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}n^2)}}$ eam esse oportet projectionis velocitatem, quæ per dimidium radium cadendo constanti vi $1-\frac{1}{2}n^2$ acquiri posset. Ratione autem normalium earumdem virium Luna in syzigiis Solis sit Terræ propior, atque inde in quadraturis recedit longius quam pro mediocri distantia, &, circulari orbita in ellipsim concentricam abeunte, distantia mediocris proxime eadem assumi potest, augeturque mediocris velocitas, ac totum tempus periodicum fit brevius quam si manente distantia mediocri velocitas projectionis non augeretur. Si elementum spatii perpendiculariter ad vectorem radium percursi dividatur per velocitatem perpendicularem, summisque elementorum omnium acceptis, expressio temporis, quæ inde prodit, comparetur cum alia formula, qua exprimi debet tempus reversionis ad eamdem apsidem, ille apogæi lunaris motus prodibit, qui cum observationibus consentiet. Verum ne aliquibus latior hæc etiam videatur approximatio, qua binæ simul hypotheses componuntur ellipsium duarum, quarum una Terram pro foco, altera pro centro habeat, præstabit in libro subsequenti apogæi motum ex generali solutione problematis eruere.

DE

DE THEORIA LUNÆ.

LIBER QUARTUS.

Aequationes omnes lunarium motuum Majerus collatis omnibus observationibus summo studio diligentissime definivit. Et primo quidem æquationem centri, in priori tabularum lunarium editione, maxima sui quantitate statuit $- 6^\circ\ 18'\ 44''$ cum angulus anomaliæ mediæ cZ sit graduum 94, aut 266. Hoc autem posito anomaliæ mediæ ejusdem angulo, secunda pars æquationis centri, quæ proportionalis est sinui anomaliæ mediæ bis acceptæ, seu $13'.\ \text{sin.}\ 2cZ$, evadit $- 13'.\ \text{sin.}\ 8^\circ = - 1'\ 48.\ 55''$: atque est pars tertia $- 37''.\ \text{sin.}\ 3cZ = - 37''.\ \text{sin.} - 78^\circ = 36.\ 19''$. Quare differentiam $- 1'\ 12.\ 36''$ subducendo, pars prior æquationis fiet $- 6^\circ\ 17'\ 31.46''$: quæ cum proportionalis sit sinui recto anguli cZ, aucta in ratione sinus totius ad sinum anguli 86°, erit in maxima sui quantitate $- 6^\circ\ 18'\ 26''$: ac generatim juxta Majeri tabulas erit omnis æquatio centri lunaris orbitæ
$- 6^\circ\ 18'\ 26''.\ \text{sin.}\ cZ + 13'.\ \text{sin.}\ 2cZ - 37''.\ \text{sin.}\ 3cZ$.

Variationem æquationis centri tabula undecima ita traditæ, sive evectionem Lunæ definivit Majerus duodecima tabula subsequenti: maximam scilicet evectionis quantitatem statuit $- 1^\circ\ 20'\ 34''$, & argumentum ipsius esse dixit duplam distantiam Lunæ a Sole correctam per antecedentes alias æquationes, dempta anomalia Lunæ media correcta: ut si media Lunæ a Sole distantia vocetur X, sine correctionibus aliis aliarum præcedentium tabularum, æquatio tota esse debeat $- 1^\circ\ 20'\ 34''.\ \text{sin.}\ 2X - cZ$. Adnotavit vero Alembertius §. 14. par. 3. de mundi systemate ex ipso tabularum contextu colligi in correctionum numerum minime recensendam esse illam, quæ pendet ex æquatione centri. Tabulas autem Majeri omnes minime exscribimus quod & seorsim, & cum aliis etiam operibus impressæ habeantur.

Tabula decima tertia Majerus primam, & secundam Lunæ variationem simul complexus est: in qua quidem tabula cum prior omnis variatio, quæ proportionalis est sin. $2X$, evanescat posito

 $X =$

$X = 90°$, ac tum ſuperſit $— 1' 57''$; variatio ſecunda, quæ proportionalis eſt ſin. X, fiet univerſim $— 1' 57''$. ſin. X, ac poſito $X = 45°$, & ſin. $X = 0.7081$, evadet $— 1' 23''$. Quare cum totam æquationem maximam Majerus in priori octante poſt novilunium, & poſt quadraturam primam ſtatuerit $39' 3''$, & in octante poſt plenilunium, & quadraturam alteram $41' 41''$; addita, & dempta quantitate $1' 23''$, fiet prima variatio circiter $40\frac{1}{3}'$. ſin. 2X. Argumentum autem æquationis hujus ſtatuit Majerus non duplam differentiam longitudinis Lunæ, & Solis, ſed duplam longitudinem Lunæ per æquationem centri, & æquationem evectionis correctam dempta longitudine Solis non correcta, aut æquata, ſed vera.

Sit igitur X diſtantia medii loci Lunæ a loco vero Solis, ſeu differentia longitudinis mediæ Lunæ, & longitudinis veræ Solis. Erit variationis primæ argumentum

$$2\,(X - 6°\,18'\,26''.\,\text{ſin.}\,cZ - 1°\,20'\,34''.\,\text{ſin.}\,\overline{2X - cZ}),\ \text{cujus ſinus eſt}$$

$$\text{ſin.}2X - 2(6°\,18'\,26'').\text{ſin.}cZ.\text{coſ.}2X - 2(1°20'34'').\text{ſin.}\overline{2X - cZ}.\text{coſ.}2X =$$

$$\text{ſi.}2X \mp 6°18'26''.\text{ſi.}(2X \pm cZ) - 1°20'34''.\text{ſi.}(4X - cZ) + 1°20'34''.\text{ſi.}cZ.$$

Quia radius æquatur arcui $57.29578°$, coefficientibus in ſe ductis, & per radium ipſum diviſis, præter æquationem $40\frac{1}{3}'$. ſin. 2X æquationes alias habebimus

$\mp 4'\,26''.\,\text{ſin.}(2X \pm cZ) - 56''.\,\text{ſin.}(4X - cZ) + 56''.\,\text{ſin.}\,cZ.$

Neglecta vero ob parvitatem correctione evectionis fiet ſecunda Lunæ variatio $— 1' 57''$. ſin. $X \pm 6.\,4''$. ſin. $(2X \pm cZ)$. Et quidem ſubducendo $4'\,19.6''$ a $1°\,20'\,34''$ fiet tota evectio reſidua $— 1°\,16'\,14.4''$. ſin. $(2X - cZ)$: æquatio autem $56''$. ſin. cZ priorem partem æquationis centri in Majeri tabulis relinquet $— 6°\,17'\,30''$. ſin. cZ.

Majerus etiam tabula decima, in priori octante lunaris apogæi cum Sole, eamdem cum Newtono retinuit quantitatem $— 3' 45''$ ſemeſtris illius æquationis, quæ pro argumento habet duplam diſtantiam mediam apogæi ipſius a Sole $2cZ - 2X$. Sed æquationem omnem Majerus diſtribuit in binas partes, quarum una eſt ſinui duplæ diſtantiæ apogæi a Sole, altera eſt ſinui ſimplicis diſtantiæ proportionalis. Pars autem prior cum evaneſcat poſito $cZ - X = 90°$, atque in hac poſitione apſidum ſuperſint $— 29''$, fiet univerſim ſecunda æquationis pars $— 29''$. ſin. $(cZ - X)$, ac poſito $cZ - X = 45°$ evadet dumtaxat $— 20''$. Cumque inſuper juxta tabulam eamdem in diſtantia $45°$, & $315°$ apogæi Lunæ a Sole ſit maxima æquatio

tio $3' 45''$, eaque non ſit major $3' 4''$ in diſtantia $135°$, aut $225°$, demendo, addendoque $20''$ fiet prior pars æquationis $- 3' 25''. \text{ſin.}(2cZ - 2X)$.

Æquationem annuam Majerus in priori eadem editione tabularum ſtatuit $11' 20''. \text{ſin.} Y$, poſito quod media Solis anomalia vocetur Y. Aliam etiam recenſuit author ipſe argumenti ejuſdem æquationem $- 10' 18''. \text{ſin.} Y$, qua debet corrigi motus annuus nodorum lunaris orbitæ, & quam bis acceptam inverſo ſigno inſervire docuit alteri correctioni anomaliæ mediæ Lunæ. Fit ita anomaliæ correctio $- 6° 18' 26''. \text{ſin.}(cZ + 11' 20''. \text{ſin.} Y + 20' 36''. \text{ſin.} Y)$, atque inde more ſolito educitur bina æquatio $\mp 1' 45''. \text{ſin.}(cZ \pm Y)$: & cum in Majeri tabulis alia occurrat æquatio $40''. \text{ſin.}(cZ - Y)$, fiet omnis æquatio hujus nominis $2' 25''. \text{ſin.}(cZ - Y)$. Simili modo pro cZ ſcribendo $cZ + 31' 56''. \text{ſin.} Y$, & diſtantiam Lunæ a Sole X corrigendo per æquationem annuam $11' 20''. \text{ſin.} Y$, & loco $2X$ ſcribendo $2X + 22' 40''. \text{ſin.} Y$, fiet tota evectio juxta Majeri tabulas correcta $- 1° 20' 34''. \text{ſin.}(2X - cZ - 9' 16''. \text{ſin.} Y) =$
$- 1° 20' 34''. \text{ſin.}(2X - cZ) \pm 13''. \text{ſin.}(2X - cZ \pm Y)$.

Addidit autem Majerus binas alias æquationes ejuſdem nominis $1' 48''. \text{ſin.}(2X - cZ + Y) + 1' 12''. \text{ſin.}(2X - cZ - Y)$: unde erit totus argumenti prioris coefficiens $2' 1''$, poſterioris $59''$. Pariter cum apud ipſum occurrat æquatio $1' 30''. \text{ſin.}(2X + cZ)$, copulando æquationem $- 4' 20''. \text{ſin.}(2X + cZ)$, quæ prodiit jam variationem per æquationem centri corrigendo, ſupererit hujus generis æquatio $- 2' 50''. \text{ſin.}(2X + cZ)$. Aliæ in Majeri tabulis occurrunt æquationes $- 54''. \text{ſin.}(2X + Y) - 1' 2''. \text{ſin.}(2X - Y)$, atque inſuper binæ aliæ habentur æquationes, quæ pendent ex loco nodi. Prima habet pro argumento duplam diſtantiam Lunæ a nodo dempta dupla diſtantia Lunæ a Sole: & ſi S denotet diſtantiam mediam Lunæ a nodo aſcendente orbitæ apud Majerum eſt hujuſmodi æquatio $- 47''. \text{ſin.}(2S - 2X)$, ut etiam a Newtono ſtatuta fuerat in ſcholio theoriæ lunaris. Altera æquatio eſt $58''. \text{ſin.}(2S - cZ)$. Æquatio reductionis motus Lunæ ad eclipticam juxta Majerum eſt $- 6' 57''. \text{ſin.} 2S$, eaque debet corrigi per æquationem centri, ut ſit correctio ipſius reductionis $2(6' 57'')(6° 18' 26''). \text{ſin.} cZ. \text{coſ.} 2S$: quæ binas alias æquationes de more ſuppeditabit $46''. \text{ſin.}(2S + cZ) - 46''. \text{ſin.}(2S - cZ)$: unde poſteriori termino addendo $58''. \text{ſin.}(2S - cZ)$ ſupererit dumtaxat $12''. \text{ſin.}(2S - cZ)$.

In editione altera tabularum, quæ anno 1767. Londini prodiit, ordi-

ordinem, & coefficientes æquationum ſingularum Majerus paululum immutavit. Eæ vero facile ad priorum normam reduci poſſunt. Primo enim ſi evectio $-1^{\circ}\,20'\,36''.\sin.(2X-cZ)$, quæ quinto loco occurrit in novis hujuſcemodi tabulis, per æquationes alias anomaliæ Solis corrigatur, præbebit $\pm 13''.\sin.(2X-cZ\pm Y)$, jungendoque æquationem ſextam, & ſeptimam earumdem tabularum habebimus $2'\,13''.\sin.(2X-cZ+Y)+34''.\sin.(2X-cZ-Y)$. Deinde vero æquatio centri, quæ duodecima eſt, quæque aſcendit ad $-6\;18'\,11''$, ſimiliter per æquationes anomaliæ Solis correcta præbebit $\mp 1'\,45''.\sin.(cZ\pm Y)$: correcta vero per evectionem præbebit inſuper $4'\,21''.\sin.2X-4'\,21''.\sin.(2cZ-2X)$: jungendoque octavam, & decimam æquationem ſupererit $2'\,13''.\sin.(cZ-Y)-3'\,21''.\sin.(2cZ-2X)$. Tertio ob partem alteram correctionis hujus variatio, quæ tertiodecimo loco ſtatuitur $35'\,47''.\sin.2X$, evadet $40'\,8''.\sin.2X$: & prior variationis quantitas $35'\,47''.\sin.2X$ per æquationem centri, & evectionem correcta exhibebit alias æquationes $\mp 3'\,56''.\sin.(2X\pm cZ)-50''.\sin.(4X-cZ)+50''.\sin.cZ$. Ita vero ſupererit æquatio centri $-6^{\circ}\,17'\,21''.\sin.cZ$: eritque tota evectio reſidua $-1^{\circ}\,16'\,40''.\sin.(2X-cZ)$: & loco quartæ æquationis exſurget $-3'\,7''.\sin.(2X+cZ)$. Ultima tabularum æquatio eſt $-6'\,51''.\sin.2S$: unde ope æquationis centri ut antea eruitur $\pm 46''.\sin.(2S\pm cZ)$: ac loco penultimæ æquationis Majeri prodit $40''.\sin.(2S-cZ)$.

Æquationibus hiſce omnibus Majerus locum Lunæ in ſua orbita tam accurate definiri dixit ut in calculo longitudinis non niſi error $1'\,27''$ collatione obſervationum aſtronomicarum prodeat. Latitudinis æquationes Majerus decem exhibuit, eaſque intra $20''$ tantum accuratas eſſe contendit. Retentis autem iiſdem noſtris denominationibus, neglectiſque aliquot aliis correctionibus, quæ ex reductionibus mediorum motuum ad veros oriri poſſent, & quæ in coefficientibus reducendis nullum ſenſibilem errorem parerent; ſi ſit cZ anomalia media Lunæ, Y anomalia media Solis, X diſtantia loci medii Lunæ a loco Solis vero, S diſtantia loci ejuſdem medii Lunæ a loco nodi correcto, ſimul collectis terminis omnibus ejuſdem nominis, longitudinis æquationes ex poſterioribus Majeri tabulis eſſe debent ut in priori columna ſubſequenti, iiſdemque ſervatis argumentis coefficientes priorum tabularum eſſe debent ut in altera columna

-6°.

− 6°.	17'.	21''.	ſin. *c*Z.	− 6°.	17'.	30''.
	+ 12.	52.	ſin. 2*c*Z.		+ 13.	
		− 37.	ſin. 3*c*Z.			− 37.
	− 1.	55.	ſin. X.		− 1.	57.
	+ 40.	8.	ſin. 2X.		+ 40.	20.
		+ 2.	ſin. 3X.			
		+ 14.	ſin. 4X.			
− 1.	16.	40.	ſin. 2X − *c*Z.	− 1.	16.	14.
		− 50.	ſin. 4X − *c*Z.			− 56.
		+ 26.	ſin. 4X − 2*c*Z.			
	− 3.	7.	ſin. 2X + *c*Z.		− 2.	50.
		− 16.	ſin. *c*Z − X.			− 29.
	− 3.	21.	ſin. 2*c*Z − 2X.		− 3.	25.
	+ 11.	14.	ſin. Y.		+ 11.	20.
		− 4.	ſin. 2Y.			
	− 1.	45.	ſin. *c*Z + Y.		− 1.	45.
	+ 2.	13.	ſin. *c*Z − Y.		+ 2.	25.
		− 58.	ſin. 2X + Y.			− 54.
	− 1.	13.	ſin. 2X − Y.		− 1.	2.
	+ 2.	13.	ſin. 2X + Y − *c*Z.		+ 2.	1.
		+ 34.	ſin. 2X − Y − *c*Z.			+ 59.
		− 51.	ſin. 2S − 2X.			− 47.
	− 6.	51.	ſin. 2S.		− 6.	57.
		+ 46.	ſin. 2S + *c*Z.			+ 46.
		+ 40.	ſin. 2S − *c*Z.			+ 12.

Latitudinis æquationes in poſterioribus Majeri tabulis ſunt

5°.	8'.	30''.	ſin. S.
	+ 8.	47.	ſin. 2X − S.
		− 8.	ſin. 2X − S + Y.
		− 5.	ſin. 2X − S − Y.
		− 3.	ſin. 2X − S + *c*Z.
		+ 16.	ſin. 2X − S − *c*Z.
		− 16.	ſin. S − *c*Z.
		− 29.	ſin. S − 2*c*Z.
		+ 3.	ſin. S − 3*c*Z.
		+ 6.	ſin. 2X − 2*c*Z + S.

CAPUT

CAPUT PRIMUM.

DE PRIORI ÆQUATIONE PROBLEMATIS TRIUM CORPORUM SE SE ATTRAHENTIUM.

PROBLEMA I.

SI corpus aliquod gravitate, quæ sit reciproce ut quadratum distantiæ, ellipsim circa focum describat, & viribus aliis quibuscumque abducatur a perimetro ellipseos, invenire elementum temporis, quod elemento cuilibet angularis motus respondet.

Sit φ excentricitas, & 1 major semiaxis illius ellipseos, quæ descriptæ orbitæ est propior, & quæ viribus decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum describi posset. Velocitas in circulo radii $1+\varphi$, juxta Theor. II. Lib. I., ea est, qua corpus eadem vi centripeta $\frac{1}{(1+\varphi)^2}$ decideret per altitudinem $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$: sive juxta §. IV. Introduct. velocitas hujusmodi esse debet $\surd\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)$. Velocitas autem in circulo, per Coroll. II. Theor. VIII. Lib. I., est ad velocitatem in vertice ellipseos ad eamdem distantiam descriptæ ut $\surd\overline{2+2\varphi}$ ad radicem lateris recti principalis, quod est $2.\overline{1-\varphi^2}$. Est igitur velocitas in vertice ellipseos $\surd\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)$: & cum ob areas temporibus proportionales velocitas radio vectori perpendicularis variari debeat in ratione inversa vectoris radii, si radius vector vocetur x, fiet universim quadratum velocitatis perpendicularis $\frac{\overline{1+\varphi}.\overline{1-\varphi}}{x^2}$, & vis centrifuga $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$. At insuper sector ellipticus in summa apside æquari debet spatio percurso in $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$ ducto: spatium vero est productum elementi temporis in projectionis velocitatem $\surd\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)$. Quod si igitur elementum temporis sit $d\theta$, erit sector ellipticus $\frac{1}{2}\surd(1-\varphi^2).d\theta$, augebiturque in simplici ratione temporis. Et iis quidem spectatis tantum viribus perturba-
tri-

tricibus, quæ juxta vectorem radium diriguntur, abducetur corpus a perimetro ellipseos, efficieturque ut radius vector x a radio elliptico differat: areæ vero circa focum descriptæ adhuc erunt proportionales temporibus. At vires perpendiculares radio, cum corpus accelerent, aut retardent, efficient etiam ut alia sit lex arearum, & sector $\frac{1}{2}x.xdz$, qui radio x, & elemento eodem temporis $d\theta$ describitur, quique ad focum subtendit angulum dz, sectore elliptico major, vel minor sit. Et quia, data vi acceleratrice, spatia percursa sunt ut quadrata temporum, si vis perpendicularis radio vocetur ω, erit $\omega d\theta^2$ spatium eodem elemento temporis percursum, & elementum variationis areæ erit $\frac{1}{2}x.\omega d\theta^2$, & tota sectoris elliptici variatio erit $\frac{1}{2}\int\omega x d\theta^2$, sive $\frac{1}{2}d\theta.\int\omega x d\theta$, vel proxime $\frac{1}{2}d\theta.\int\omega x^2 dz$. Primo enim ob parvitatem vis perturbatricis negligi poterit productum quantitatis $\frac{1}{2}\int\omega x d\theta$ in variationem elementi temporis $d\theta$, quæ oritur ex vi ω, quæque aliqua ipsius potentia debet exprimi: deinde vero in producto $\omega d\theta$ negligi poterit differentia sectoris $\frac{1}{2}x^2 dz$, & sectoris elliptici $\frac{1}{2}\surd(1-\varphi^2).d\theta$, & loco $\omega x d\theta$ substitui poterit $\omega x^2 dz$. Erit igitur

$$\tfrac{1}{2}\surd(1-\varphi^2).d\theta = \tfrac{1}{2}x^2 dz - \tfrac{1}{2}d\theta.\int\omega x^2 dz, \text{ \&}$$

$$d\theta = \frac{x^2 dz}{\surd(1-\varphi^2)+\int\omega x^2 dz}.$$

COROLLARIUM I.

Si iisdem positis denominationibus gravitas in mediocri distantia ut antea vocetur 1, & universim sit $\frac{1}{x^2}$; erit $\frac{1-\varphi^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ vis omnis, qua corpus in orbita elliptica juxta vectorem radium ascendet, vel descendet. Quod etiam ex Probl. XV. Lib. III. manifestum est. Cum enim vis centripeta ad centrifugam in summa apside ellipseos se habere debeat reciproce ut radius osculi ad foci distantiam, sive directe ut $1 : 1-\varphi$, ac sit ibidem gravitas $\frac{1}{(1+\varphi)^2}$; erit vis centrifuga $\frac{1-\varphi}{(1+\varphi)^2}$: quæ cum variari debeat in ratione $x^3 : (1+\varphi)^3$, erit ad distantiam quamcumque x vis centrifuga $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$.

Corollarium II.

Quia vero quadratum spatii divisum per quadratum temporis $\frac{x^4 dz^2}{1-\phi^2+2\int \omega x^3 dz}$ æquatur quadrato velocitatis; spectatis viribus perturbatricibus erit quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis $\frac{x^2 dz^2}{d\theta^2} = \frac{1-\phi^2+2\int \omega x^3 dz}{x^2}$: & vis centrifuga, quæ in orbita elliptica jam erat $\frac{1-\phi^2}{x^3}$, ob vires ipsas perturbatrices fiet $\frac{1-\phi^2+2\int \omega x^3 dz}{x^3}$: eritque ipsius vis centrifugæ, ac gravitatis differentia $\frac{1-\phi^2+2\int \omega x^3 dz}{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

Corollarium III.

Si vires omnes perturbatrices accipiantur ut in Probl. III. Lib. II., & sit mediocris vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita $\frac{1}{2} n^2 x . \overline{1-\frac{3}{2}\pi^2}$, & vires aliæ juxta eumdem radium agentes vocentur ϖ; erit vis omnis qua Luna juxta vectorem radium ascendet, vel descendet $\frac{1-\phi^2+2\int \omega x^3 dz}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} n^2 x . \overline{1-\frac{3}{2}\pi^2} + \varpi$. Vis enim ω, cum sit radio perpendicularis, non alia ratione motum Lunæ accedendi, aut recedendi a Terra juxta radium ipsum afficiet, quam quod velocitatem perpendicularem, & vim centrifugam minuat, vel augeat: tota autem velocitas eadem perpendicularis, & velocitas juxta vectorem radium ob vires alias exsurgens semitam omnem Lunæ determinant.

Problema II.

Iisdem positis invenire æquationem differentialem vectoris radii.

In primis si radius quicumque vector sit x, & dx elementum radii, atque universim sit dv elementum velocitatis, qua corpus aliquod ob vim quamcumque acceleratricem F juxta radium ipsum ascendit, vel descendit; erit $F.d\theta = dv$: & cum sit $v = \frac{dx}{d\theta}$, ele-

mentis

mentis de more ſumptis fiet $F.d\theta = \frac{ddx.d\theta - dx.dd\theta}{d\theta^2}$, ſive $F.d\theta^2 = ddx - dx.\frac{dd\theta}{d\theta}$: ad quam generalem formulam motus omnis variabilis reducitur. In caſu autem problematis antecedentis erit

$$d\theta = \frac{x^2 dz}{\surd(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 dz}$$

$$dd\theta = \frac{2xdxdz}{\surd(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 dz} - \frac{x^2 dz.\omega x^3 dz}{1-\varphi^2+2\int \omega x^3 dz}$$

$$-dx.\frac{dd\theta}{d\theta} = -\frac{2dx^2}{x} + \frac{\omega x^3 dxdz}{\surd(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 dz}.$$

Quod ſi igitur loco F ſubſtituamus expreſſionem ipſam corollarii poſterioris, generalis variabilium motuum formula abibit in hanc aliam

$$F.d\theta^2 = ddx - \frac{2dx^2}{x} + \frac{\omega x^3 dxdz}{\surd(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 dz}$$

$$= xdz^2 - \frac{x^2 dz^2}{1-\varphi^2+2\int \omega x^3 dz} + \frac{(\frac{1}{2}n^2 x.\overline{1-\frac{3}{2}\varpi^2}+\varpi).x^4 dz^2}{1-\varphi^2+2\int \omega x^3 dz}.$$

Neglectis itaque ob parvitatem quadratis virium perturbatricium, & poteſtatibus excentricitatis pluſquam quadraticis æquatio differentialis orbitæ hoc ordine diſponi poterit

$$\frac{xddx-2dx^2}{dz^2} = x^2 - \frac{x^3}{1-\varphi^2} + \frac{(\frac{1}{2}n^2 x.^4\overline{1-\frac{3}{2}\varpi^2}+\varpi x^3)}{1-\varphi^2}$$

$$+ \frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1-2\varphi^2} - \varpi x^4.\frac{dn}{dz}.$$

Corollarium I.

Si fiat $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}n^2 x.\overline{1-\frac{1}{2}\varpi^2} - \varpi = \psi$, & $1-\varphi^2 = g^2$, prior æquatio differentialis hanc aliam formam induet

$$xdz^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \frac{\psi x^4 dz^2}{g^2+2\int \omega x^3 dz} + \frac{\omega x^3 dxdz}{g+\int \omega x^3 dz}:$$

& quia quantitas ω exigua eſt, g vero proxime accedit ad unitatem, proxime etiam ſtatui poterit

$$xdz^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = (\psi + \frac{\omega dx}{xdz}).\frac{x^4 dz^2}{g^2+2\int \omega x^3 dz}.$$

Co-

Corollarium II.

Quod si fiat insuper $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, $\frac{dx^2}{x} = \frac{du^2}{u^3}$, $ddx = -\frac{u^2 ddu + 2udu^2}{u^4}$, & $xdz^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \frac{dz^2}{u} + \frac{ddu}{u^2}$, æquatio eadem differentialis in hanc aliam transformabitur

$$udz^2 + ddu - \frac{\frac{dz^2}{g^2u^2}\left(\psi - \frac{\omega du}{udz}\right)}{1 + \frac{2\int \omega dz}{g^2u^2}} = 0 .$$

Problema III.

Iisdem positis invenire æquationem differentialem differentiæ vectoris radii, quæ gignitur actione virium perturbatricium.

Si excentricitas orbitæ ellipticæ ut antea vocetur φ, & distantia mediocris a foco exprimatur unitate, per Coroll. III. Probl. III. Lib. I., erit radius vector ellipseos $\frac{1-\varphi^2}{1-\varphi.\,\text{cos}.\,cz}$: & si insuper t designet spatium illud exiguum, quo corpus actione virium perturbatricium abducitur a perimetro ellipseos, neglectis plusquam quadraticis excentricitatis potestatibus fiet ordine

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\,\text{cos}.\,cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{cos}.\,2cz + t$$

$$\frac{dx}{dz} = -\varphi c.\,\text{sin}.\,cz - \varphi^2 c.\,\text{sin}.\,2cz + \frac{dt}{dz}$$

$$-\frac{2dx^2}{dz^2} = -\varphi^2c^2 + \varphi^2c.\,\text{cos}.\,2cz - \frac{2dt^2}{dz^2}$$
$$+ 4\varphi c.\,\text{sin}.\,cz.\frac{dt}{dz} + 4\varphi^2c.\,\text{sin}.\,2cz.\frac{dt}{dz}$$

$$\frac{ddx}{dz^2} = -\varphi c^2.\,\text{cos}.\,cz - 2\varphi^2c^2.\,\text{cos}.\,2cz + \frac{ddt}{dz^2}$$

$$x^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2\varphi.\,\text{cos}.\,cz + \tfrac{3}{2}\varphi^2.\,\text{cos}.\,2cz + \overline{2-\varphi^2}.\,t$$
$$+ 2\varphi t.\,\text{cos}.\,cz + \varphi^2 t.\,\text{cos}.\,2cz + t^2$$

$$x^3 = 1 + 3\varphi.\,\text{cos}.\,cz + 3\varphi^2.\,\text{cos}.\,2cz + \overline{3-\tfrac{3}{2}\varphi^2}.\,t$$
$$+ 6\varphi t.\,\text{cos}.\,cz + \tfrac{9}{2}\varphi^2 t.\,\text{cos}.\,2cz + 3t^2$$

$x^4 =$

$$x^4 = 1 + \varphi^2 + 4\varphi . \text{cos}. cz + 5\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + 4s \text{ \&c.}$$

$$x^5 = 1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2 + 5\varphi . \text{cos}. cz + \tfrac{15}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + 5s \text{ \&c.}$$

$$x^6 = 1 + \tfrac{9}{2}\varphi^2 + 6\varphi . \text{cos}. cz + \tfrac{21}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + \overline{6 + 5\varphi^2} . s + 30\varphi s . \text{cos}. cz$$

$$x^7 = 1 + 7\varphi^2 + 7\varphi . \text{cos}. cz \text{ \&c.}$$

$$\frac{\frac{1}{2}n^2 x^6}{1 - \varphi^2} = \tfrac{1}{2}n^2 . \overline{1 + \tfrac{11}{2}\varphi^2} + n^2 s . \overline{3 + \tfrac{11}{2}\varphi^2} + 3n^2\varphi . \text{cos}. cz$$

$$+ \tfrac{21}{4}n^2\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + 15\varphi n^2 s . \text{cos}. cz$$

$$-\omega x^4 . \frac{dx}{dz} = \omega\varphi c x^4 . \text{sin}. cz + \omega\varphi^2 c x^4 . \text{sin}. 2cz - \frac{\omega ds}{dz}$$

$$x^2 - \frac{x^3}{1 - \varphi^2} = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \varphi . \text{cos}. cz - \tfrac{3}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2cz - (1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2) . s$$

$$- 4\varphi s . \text{cos}. cz - \tfrac{7}{2}\varphi^2 s . \text{cos}. 2cz - 2s^2$$

$$\frac{x\,ddx - 2dx^2}{dz^2} = x . \left(\frac{dds}{dz^2} - \varphi c^2 . \text{cos}. cz - 2\varphi^2 c^2 . \text{cos}. 2cz\right) - \frac{2ds^2}{dz^2}$$

$$- \varphi^2 c^2 (1 - \text{cos}. 2cz) + (\text{sin}. cz + \varphi . \text{sin}. 2cz) . 4\varphi c . \frac{ds}{dz}$$

$$- \varphi c^2 x . \text{cos}. cz = - \varphi c^2 . \text{cos}. cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 c^2 . (1 + \text{cos}. 2cz) - \varphi c^2 s . \text{cos}. cz .$$

Collectis itaque, atque ordinatis terminis, superioris problematis æquatio abibit in hanc aliam

$$\frac{x\,dds}{dz^2} + \left(1 - 3n^2 . \overline{1 - \tfrac{3}{2}\varpi^2} + \tfrac{5}{2}\varphi^2 - \tfrac{11}{2}n^2\varphi^2\right) . s$$

$$= \tfrac{1}{2}n^2 . \left(1 + \tfrac{11}{2}\varphi^2\right) + \varphi . (c^2 - 1 + 3n^2) . \text{cos}. cz$$

$$+ \tfrac{21}{4}n^2\varphi^2 . \text{cos}. 2cz + \tfrac{3}{2}\varphi^2 . (c^2 - 1)(1 + \text{cos}. 2cz)$$

$$- (4 - c^2 - 15n^2) . \varphi s . \text{cos}. cz - \tfrac{3}{2}\varphi^2 s . \text{cos}. 2cz$$

$$+ (\text{sin}. cz + \varphi . \text{sin}. 2cz)\left(\varphi\omega c x^4 - 4\varphi c . \frac{ds}{dz}\right)$$

$$- 2s^2 - \frac{\omega ds}{dz} + \frac{2ds^2}{dz^2}$$

$$+ \frac{\omega x^5}{1 - \varphi^2} + \frac{2x^3 \int \omega x^2 dz}{1 - 2\varphi^2} .$$

Quod si denique in priori termino substituatur valor vectoris radii, dividaturque æquatio omnis per $1 + \frac{5}{2}\varphi^2 + \frac{9}{2}n^2\varpi^2$, ut coefficiens

se-

secundi termini fiat $1 - 3n^2 + 2n^2\phi^2$, ac rursus æquatio exsurgens dividatur per $1 + 2n^2\phi^2$ ut pro eodem coefficiente supersit tantum $1 - 3n^2$, neglectis inferiorum ordinum fractionibus erit quæsita æquatio

$$\frac{dds}{dz^2} + (1 - 3n^2).s$$
$$= \tfrac{1}{2}n^2 - 3n^2\phi^2 + (c^2 - 1 + 3n^2).\frac{\phi.\text{cos}.cz}{1 + \frac{5}{2}\phi^2}$$
$$+ \frac{21}{4}n^2\phi^2.\text{cos}.2cz + \tfrac{3}{2}\phi^2(c^2 - 1)(1 + \text{cos}.2cz)$$
$$-(4 - c^2 - 15n^2).\frac{\phi s.\text{cos}.cz}{1 + \frac{5}{2}\phi^2} - \tfrac{3}{2}\phi^2 s.\text{cos}.2cz$$
$$+(\text{sin}.cz + \phi.\text{sin}.2cz)\left(\phi\omega cx^4 - 4\phi c.\frac{ds}{dz}\right)$$
$$-(\phi.\text{cos}.cz + \tfrac{1}{2}\phi^2.\text{cos}.2cz - 3\phi^2 - \tfrac{8}{2}n^2\pi^2 + s)\frac{dds}{dz^2}$$
$$-2s^2 - \frac{\omega ds}{dz} + \frac{2ds^2}{dz^2} + \frac{\pi x^5}{1 + \frac{1}{2}\phi^2} + \frac{2x^3\int\omega x^2 dz}{1 + \frac{1}{2}\phi^2}.$$

COROLLARIUM I.

Hæc cum sit generalis æquatio curvæ, quæ spectatis viribus omnibus juxta vectorem radium, & perpendiculariter ad radium ipsum agentibus a Luna describeretur, patet primo quod si in expressione vectoris radii fiat $c = 1$, & motus omnis ad ellipsim illam referatur, quæ sine viribus perturbatricibus, apsidibus immobilibus, describeretur in plano immobili; essent priores æquationis termini

$$\frac{dds}{dz^2} + (1 - 3n^2).s = n^2(\tfrac{1}{2} + 3\phi.\text{cos}.z) - 3n^2\phi^2(1 - \tfrac{7}{4}.\text{cos}.2z)\&c.,$$

& juxta formulas Lem. X. initio expositas erueretur

$$s = \tfrac{1}{2}n^2\left(\frac{1 - \text{cos}.\surd(1 - 3n^2).z}{1 - 3n^2} + \frac{3n^2\phi}{1 - 3n^2 - 1}\right)(\text{cos}.z - \text{cos}.\surd(1 - 3n^2).z)$$

seu proxime $s = -\phi.\text{cos}.z + \phi.\text{cos}.\surd(1 - 3n^2).z$.

COROLLARIUM II.

Quod si igitur alii omnes termini, qui simplicem differentiam s involvunt, sive qui ex quantitate $\frac{2x^3\int\omega x^2 dz}{1 + \frac{1}{2}\phi^2}$, sive qui ex ter-

mino

mino $-2t^2$ possunt exsurgere, in æquatione differentiali satis proxime, ut inferius videbimus, se se invicem compensent; integrata æquatione fiet postmodum radius vector

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\cos.z + t = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\cos.\sqrt{(1-3n^2)}.z.$$

Scilicet qui prior erat radii vectoris terminus $\varphi.\cos.z$, quique in ellipsi immobili anomaliæ angulum exhibebat æqualem angulari motui circa focum concepto, evanescet, & loco ipsius novus exsurget terminus $\varphi.\cos.\sqrt{(1-3n^2)}.z$, atque angulari motui z respondebit anomaliæ angulus $\sqrt{(1-3n^2)}.z$: cumque coefficiens $\sqrt{(1-3n^2)}$ sit unitate minor, angularis etiam distantia a summa apside fiet minor angulari motu circa focum, & apsides in eamdem plagam ferentur juxta ordinem signorum in consequentia.

Corollarium III.

Si fiat anomaliæ angulus $\sqrt{(1-3n^2)}.z = 360°$, erit angularis motus circa focum $z = \frac{360°}{\sqrt{(1-3n^2)}}$, atque erit motus utriusque ratio $\sqrt{(1-3n^2)}:1$. Cum sit igitur $n = \frac{27^d\,7^h\,43^l}{365^d\,6^h\,9^l}$ $= 0.0748017$, & $n^2 = 0.0055953$, erit $1-3n^2 = 0.9832141$, & $\sqrt{(1-3n^2)} = 0.99157$, ac fiet $z : z - \sqrt{(1-3n^2)}.z = 1 : 0.00843$. Quare cum motus diurnus Lunæ juxta Majeri tabulas sit $13°\,10'\,35''$, erit progressus apsidum diebus singulis $6'\,40''$, qui juxta easdem tabulas $6'\,40''\,56'''$ deberet esse; si fractionibus etiam aliis exiguis supputatis, subductisque numeris omnibus statui posset coefficiens secundi æquationis differentialis termini $0.9831714 = c^2$, & $c = 0.99155$, fieret etiam motus diurnus apsidum $6'\,40''\,49.5'''$, & motus annuus $40°\,40'$, proxime ut ferunt Astronomicæ observationes.

Scholion.

Qui theoriam lunarem ex legibus gravitatis eruendam sibi assumpserunt summi, ac clarissimi Mathematici sua singuli methodo in eamdem inciderunt æquationem differentialem lunaris orbitæ, quæ in Coroll. I. Probl. II. facilius modo ex prioribus motus notionibus eruta est, Eulerus, Alembert, Clairaut, Majerus, Simpsonius, Melander, & Riccatus. Apud Alembertum enim pag. 55. par. 1. de Mundi systemate est $g^2 = \frac{R^4}{1+3\varphi^2}$, & juxta antecedentes nostras

deno-

denominationes esse deberet $R = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\varphi^2}$ quam proxime, adeoque esset $g^2 = 1 - \varphi^2$. Quo posito non alia exsurgeret in comparandis æquationibus differentia, quam quod apud nos occurrat terminus $\frac{\int \omega x^3 dx dz}{g + \int \omega x^3 dz}$ loco $\frac{\omega x^3 dx dz}{g^2 + 2\int \omega x^3 dz}$: quæ differentia exigua cum ex neglectis quantitatibus inferiorum ordinum pendeat, nihil ad calculi totius progressum faciet: etenim ob parvitatem vis perturbatricis ω, & differentiæ s radii vectoris x, in tota calculi serie supputandus dumtaxat occurret terminus $\omega x^3 dx dz$ supra erutus ex æquatione temporis $dt = \frac{x^2 dz}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega x^3 dz}$, quæ nobis, & memoratis Authoribus est communis. Æquationes alias magis compositas pro generali solutione problematis trium corporum se se attrahentium nuperrime authores alii ingeniosissimi tradiderunt. Ex iis vero ad ultimas usque motuum lunarium æquationes cum minime appareat qui progressus haberi possit, cumque non nisi approximationibus problemata omnia hujus generis ultimo possint resolvi; ut approximationes simplicitate, ac brevitate accuratiores efficeremus, post indicatam in Coroll. II. Probl. II. communem priorum Authorum reductionem, æquationem differentialem in Probl. III. ad novam formam traduximus, in qua radius vector ad sextam usque potentiam ascendit, & cujus commodum in supputando apogæi motu, majoribusque, & minoribus Lunæ æquationibus determinandis inferius patebit.

CAPUT SECUNDUM.

DE VIRIUM PERTURBATRICIUM RESOLUTIONE, ET DE APOGÆI MOTU.

PROBLEMA IV.

DEterminare vires omnes perturbatrices lunaris orbitæ, & quæ juxta vectorem radium diriguntur, & quæ sunt radio perpendiculares.

Sit $1:n$ ratio mediorum motuum Lunæ, & Solis, atque insuper medius Lunæ motus ad motum angularem Terræ ab aphelio se habeat ut $1:m$, & motus Solis se habeat ad motum medium noper

dorum lunaris orbitæ ut $n:p$, ac denique motus Lunæ verus ut antea vocetur z, medius Z, anomalia vera cz, media cZ, & excentricitas terrestris orbitæ ut antea vocetur δ, lunaris φ. Erit motus medius Solis nZ, angularis Terræ distantia ab aphelio mZ, ac dempta æquatione centri erit verus Solis motus quam proxime $nZ - 2\delta.\,\text{fin}.\,mZ$. Et quia juxta formulam Probl. V. Lib. I. est

$$Z = z + \frac{2\varphi}{c}.\,\text{fin}.\,cz + \frac{3\varphi^2}{4c}.\,\text{fin}.\,2cz \ \&c.,$$

in minoribus fractionibus loco $\frac{1}{c}$ scribendo unitatem, erit

$$nZ - 2\delta.\,\text{fin}.\,mZ = nz + 2\varphi n.\,\text{fin}.\,cz + \tfrac{3}{4}\varphi^2 n.\,\text{fin}.\,2cz - 2\delta.\,\text{fin}.\,mz,$$

atque in fig. 36. erit distantia Lunæ a sole STL =

$$z - nz - 2\varphi n.\,\text{fin}.\,cz - \tfrac{3}{4}\varphi^2 n.\,\text{fin}.\,2cz + 2\delta.\,\text{fin}.\,mz.$$

His positis si juxta formulas Lem. I. & II. jam supra traditas resolvantur termini, ob parvitatem quantitatum φ, δ, & n, erit

$$\text{cof}.\,STL = \text{cof}.(1-n).z \mp \delta.\,\text{cof}.(1-n\mp m).z \ \&c.$$

$$\text{cof}.\,2\,STL = \text{cof}.(2-2n).z \mp 2\delta.\,\text{cof}.(2-2n\mp m).z$$
$$\pm 2\varphi n.\,\text{cof}.(2-2n\mp c).z + \tfrac{3}{4}\varphi^2 n.\,\text{cof}.(2c+2n-2).z:$$

& cum motus Solis a nodo ATB, in fig. 37., sit $nz + pz$, loco productorum cof. TSs. cof. 2STL, & cof. 2ATB. cof. 2STL simili modo accipiendo dimidium cosinuum summæ, ac differentiæ duorum angulorum, neglectisque aliis inferiorum ordinum fractionibus, posita vi mediocri perturbatrice $\frac{1}{2}n^2x.(1-\frac{3}{2}\pi^2)$, ut in Probl. III. Lib. II., fiet vis reliqua juxta vectorem radium exercita

$$\begin{aligned}
\pi = {} & \frac{9n^2x^2}{8a}.\,\text{cof}.(1-n).z \\
& + \tfrac{3}{2}n^2x.(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof}.(2-2n).z \\
& + \frac{15n^2x^2}{8a}.\,\text{cof}.(3-3n).z \\
& \pm 3\varphi n^2x.\,\text{cof}.(2-2n\mp c).z \\
& + \tfrac{9}{8}\varphi^2 n^2.\,\text{cof}.(2c+2n-2).z \\
& - \tfrac{3}{2}\delta n^2x.(1-\tfrac{3}{2}\pi^2).\,\text{cof}.\,mz \\
& - 3\delta n^2x(\tfrac{1}{4}\pm 1).\,\text{cof}.(2-2n\mp m).z \\
& - \frac{9\delta n^2x^2}{4a}(1\pm\tfrac{1}{2}).\,\text{cof}.(1-n\mp m).z \\
& + \tfrac{3}{4}\pi^2n^2x.\,\text{cof}.(2n+2p).z \\
& + \tfrac{3}{8}\pi^2n^2x.\,\text{cof}.(2-2n\pm 2n\pm 2p).z.
\end{aligned}$$

Pa-

Pariter erit $\sin. STL = \sin. (1-n).z \mp \delta . \sin. (1-n\mp m).z$,
& $\sin. 2STL = \sin. (2-2n).z \mp 2\delta . \sin. (2-2n\mp m).z$

$$\pm 2\varphi n . \sin. (2-2n\mp c).z - \tfrac{3}{4}\varphi^2 n . \sin. (2c+2n-2).z.$$

Quare si in eadem fig. 36. intelligamus Lunam a syzigiarum linea TS digressam usque ad L retardari actione Solis, & vim u perpendicularem vectori radio agere in adversam partem, similibus substitutionibus ex posteriori formula Probl. III. Lib. II. eruetur

$$\begin{aligned} u = &-\frac{3n^2x^2}{8a}.\sin.(1-n).z \\ &-\tfrac{3}{2}n^2x.(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\sin.(2-2n).z \\ &-\frac{15n^2x^3}{8a}.\sin.(3-3n).z \\ &\mp 3\varphi n^2x.\sin.(2-2n\mp c).z \\ &+\tfrac{9}{8}\varphi^2n^2.\sin.(2c+2n-2).z \\ &+3\delta n^2x(\tfrac{3}{4}\pm 1).\sin.(2-2n\mp m).z \\ &+\frac{3\delta n^2x^2}{4a}(1\pm\tfrac{1}{2}).\sin.(1-n\mp m).z \\ &-\tfrac{3}{8}\pi^2n^2x.\sin.(2-2n\pm 2n\pm 2p).z. \end{aligned}$$

COROLLARIUM I.

Quia, si constantium quantitatum valor consideretur, coefficiens $2-2n-c$ a coefficiente secundi æquationis differentialis termini parum differre debet, atque exigua est quantitas $2c+2n-2$; ob rationes illas, quas sub finem præmissorum lemmatum attigimus, in terminis argumenti $(2-2n-c).z$, & $(2c+2n-2).z$ quantitates etiam inferiorum ordinum supputare oportebit. E contra vero cum exiguus coefficiens illius termini, qui pro argumento habet $(2-2n+2c).z$, utraque problematis integratione imminui debeat, in supputandis viribus perturbatricibus negligi omnino poterit.

COROLLARIUM II.

Pariter cum ob lentissimum motum apsidum terrestris orbitæ sit proxime $m=n$, ex binis terminis argumenti $(1-n\mp m).z$ præcipuus erit qui inferiori signo afficietur. Ex binis etiam terminis argumenti $(2-2n\pm 2n\pm 2p).z$, qui afficietur superiori signo dumtaxat in potestatem aliquam radii vectoris ductus, ac debite

bite reſolutus binos alios terminos exhibebit argumenti $(2+2p-c).z$, & $(2+2p-2c).z$, quorum unus priore, alter vero ſecunda integratione problematis ob eaſdem rationes potiſſimum augebitur.

Corollarium III.

Contra ſi correctione medii nodorum motus, & mediæ inclinationis lunaris orbitæ adhibita, loco pz ſcribamus $pz-\frac{1}{4}n.\text{ſin}.(2+2p).z$, & loco π^2 ſcribamus $\pi^2(1+\frac{1}{4}n.\text{coſ}.\overline{2nz+2pz})$, ex poſterioribus virium perturbatricium terminis nullum alium eruemus terminum argumenti $2nz+2pz$, cujus potior ratio, ob parvitatem quantitatis $2n+2p$, haberi debeat. Quod ſatis erit hic indicaſſe ut ſubſequentium calculorum ſeriem evolvendo ex ſe lector facile intelligat cur neglectis quibuſdam terminis nonnullos alios ad quantitates uſque inferiorum ordinum ſupputaverimus.

Problema V.

Expreſſionem vis perpendicularis in differentiali æquatione ſubſtituere.

Si valor radii vectoris x ex tertio, & valor vis perpendicularis ω ex quarto ſuperiore Problemate accipiantur, in expreſſione quantitatis ωx^3, quæ differentiali æquationi obvolvitur, reſolutis de more terminis evadet

$$-\frac{3n^2x^3}{8a}.\text{ſin}.(1-n).z=-\frac{3n^2}{8a}.\text{ſin}.(1-n).z$$

$$+\frac{15\varphi n^2}{16a}.\text{ſin}.(c+n-1).z$$

$$-\frac{1}{2}n^2x^4(1-\frac{1}{2}\pi^2).\text{ſin}.(2-2n).z=-\frac{1}{2}n^2.(1+\varphi^2)(1-\frac{1}{2}\pi^2).\text{ſin}.(2-2n).z$$

$$+3n^2(\varphi-\frac{1}{8}\varphi^3)(1-\frac{1}{2}\pi^2).\text{ſin}.(2-2n\mp c).z$$

$$+\frac{15}{4}n^2\varphi^2.(1-\frac{1}{2}\pi^2).\text{ſin}.(2c+2n-2).z$$

$$-3\varphi n^2x^4.\text{ſin}.(2-2n-c).z=-3\varphi n^2.\text{ſin}.(2-2n-c).z$$

$$+6\varphi^2n^2.\text{ſin}.(2c+2n-2).z$$

$$+\frac{3\delta}{8a}n^2x^3.\text{ſin}.(1-n+m).z=\frac{3\delta n^2}{8a}.\text{ſin}.(1-n+m).z$$

$$+\frac{15\varphi\delta n^2}{16a}.\text{ſin}.(1-n+m-c).z$$

$$-\tfrac{3}{4}\delta n^2 x^4.\,\text{fin.}(2-2n+m).z = -\tfrac{3}{4}\delta n^2.\,\text{fin.}(2-2n+m).z$$
$$-\tfrac{3}{2}\varphi\delta n^2.\,\text{fin.}(2-2n+m-c).z$$
$$+\frac{21}{4}\delta n^2 x^4.\,\text{fin.}(2-2n-m).z = \frac{21}{4}\delta n^2.\,\text{fin.}(2-2n-m).z$$
$$+\frac{21}{2}\varphi\delta n^2.\,\text{fin.}(2-2n-m-c).z$$
$$-\tfrac{3}{8}\pi^2 n^2 x^4.\,\text{fin.}(2+2p).z = -\tfrac{3}{8}\pi^2 n^2.\,\text{fin.}(2+2p).z$$
$$-\tfrac{3}{4}\varphi\pi^2 n^2.\,\text{fin.}(2+2p-c).z$$
$$-\frac{15}{16}\varphi^2\pi^2 n^2.\,\text{fin.}(2+2p-2c).z.$$

Cum itaque ſumma omnium ſinuum ſit ſinus verſus per coefficientem variabilis anguli diviſus, ſi F denotet ſummam coefficientium omnium conſtantium inverſo ſigno acceptorum, erit

$$\int \omega x^3 dz = \text{F} + \frac{3n^2}{8a.(1-n)}.\,\text{coſ.}(1-n).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2.\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}(2-n).z$$
$$+\frac{5n^2}{8a(1-n)}.\,\text{coſ.}(3-3n).z$$
$$+3n^2\frac{(\varphi-\frac{1}{8}\varphi^3)}{2-2n\mp c}(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}(2-2n\mp c).z$$
$$+3\varphi n^2.\,\text{coſ.}(2-2n-c).z$$
$$-\frac{15\varphi n^2}{16a(c+n-1)}.\,\text{coſ.}(c+n-1).z$$
$$-\frac{3\varphi^2 n^2}{16}\left(\frac{10+19n}{c+n-1}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}(2c+2n-2).z$$
$$-\frac{3\delta n^2}{8a}.\,\text{coſ.}(1-n+m).z$$
$$-\frac{15\varphi\delta n^2}{16a(1-c)}.\,\text{coſ.}(1-n+m-c).z$$
$$-\frac{3\delta n^2}{4.(2-n)}.\,\text{coſ.}(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21\delta n^2}{4(2-3n)}.\,\text{coſ.}(2-2n-m).z$$

+

$$+\frac{3\varphi\delta n^2}{2(2-n-c)}.\text{cos.}(2-2n+m-c).z$$
$$-\frac{21\varphi\delta n^2}{2(2-3n-c)}.\text{cos.}(2-2n-m-c).z$$
$$+\tfrac{3}{16}\pi^2 n^2.\text{cos.}(2+2p).z$$
$$+\tfrac{3}{4}\varphi\pi^2 n^2.\text{cos.}(2+2p-c).z$$
$$+\frac{15\varphi^2\pi^2 n^2}{32(1+p-c)}.\text{cos.}(2+2p-2c).z.$$

Corollarium.

Ut quantitas conſtans F numeris exprimatur, in primis ex Coroll. III. Probl. I. Lib. III. aſſumi poterit medius nodorum motus $p=\frac{3}{4}n^2$. Deinde, ut in locis aliis præcedentibus, ſtatuendum erit $n=m=0.0748017$, $n^2=0.0055953$, $\varphi=0.0547$, $\delta=0.0168$, $\pi=0.0898$, $\frac{1}{a}=\frac{9''}{3438''}=\frac{1}{382}$. Denique ob tarditatem motus apogæi Lunæ ſtatui etiam poſſet quam proxime $c=1$. Tum enim qui exſurget valor quantitatis quæſitæ F ad verum quam proxime accedet, ac poſtmodum apogæi motu, & valore coefficientis c accuratius ſupputato, poſſet omnino corrigi. At cum correctio hujuſmodi exigua ſit, ne approximationes iterum reaſſumpto calculo repetamus, juxta obſervationes, & ad normam Coroll. III. Probl. III. ſtatuemus $c=0.99155$, & numeris hiſce omnibus ſubſtitutis ſuo loco ſingulis habebimus

$$\begin{aligned}\int ux^3dz = &-0.0051615+0.00000594.\text{cos.}(1-n).z\\ &+0.0045313.\text{cos.}(2-2n).z\\ &+0.00001.\text{cos.}(3-3n).z\\ &+0.001133067.\text{cos.}(2-2n-c).z\\ &+0.0003216.\text{cos.}(2-2n+c).z\\ &-0.0000113.\text{cos.}(c+n-1).z\\ &-0.000540333.\text{cos.}(2c+2n-2).z\\ &-0.0000015.\text{cos.}(1-n+m-c).z\\ &+0.0000366.\text{cos.}(2-2n+m).z\\ &-0.000278.\text{cos.}(2-2n-m).z\\ &-0.0000688.\text{cos.}(2-2n-m-c).z\\ &+0.000008.\text{cos.}(2-2n+m-c).z\\ &+0.000008.\text{cos.}(2+2p).z\\ &+0.0000018.\text{cos.}(2+2p-c).z\\ &+0.000005.\text{cos.}(2+2p-2c).z.\end{aligned}$$

PRO-

Problema VI.

Iisdem positis Apogæi lunaris motum invenire.

Si valor quantitatis $\int \omega x^3 dz$ ex Problemate superiore accipiatur, ducanturque termini omnes in alios terminos, qui radii vectoris cubum x^3, juxta Probl. II., exprimunt, & eadem semper ratione, ope Lemmatum præmissorum, producta cosinuum omnium resolvantur, posito brevitatis gratia $\frac{10+19n}{8(c+n-1)} = k$, erit

$$\frac{2x^3\int \omega x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{2F}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}(1+3\varphi.\text{cos}.cz+\overline{3-\tfrac{1}{2}\varphi^2}.\epsilon)$$

$$+\frac{3n^2}{4a}\left(\frac{1-\frac{5}{2}\varphi^2}{1-n}\right).\text{cos}.(1-n).z$$

$$+\tfrac{3}{8}n^2(1-\tfrac{3}{2}\pi^2)\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}+\overline{6\varphi^2.n+\frac{1}{2-2n+c}+\frac{1}{2-2n-c}}\right).c.(2-2n).z$$

$$+\frac{5n^2}{4a(1-n)}.\text{cos}.(3-3n).z$$

$$+3n^2\varphi(1-\tfrac{3}{2}\pi^2)\left(\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n-c}+2n-\tfrac{3}{2}\varphi^2k\right).c.(2-2n-c).z$$

$$+3n^2\varphi(1-\tfrac{3}{2}\pi^2)\left(\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n+c}\right).\text{cos}.(2-2n+c).z$$

$$-\frac{3n^2\varphi}{8a}\left(\frac{5}{c+n-1}-\frac{3}{1-n}\right).\text{cos}.(c+n-1).z$$

$$-3n^2\varphi^2(1-\tfrac{3}{2}\pi^2)\left(k-\frac{3}{4-4n}-\frac{3}{2-2n-c}-3n\right).c.(2c+2n-2).z$$

$$-\frac{3n^2\delta}{4a}.\text{cos}.(1-n+m).z$$

$$+\frac{3n^2\delta}{4-2n}.\text{cos}.(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21n^2\delta}{4-6n}.\text{cos}.(2-2n-m).z$$

$$-\tfrac{3}{2}n^2\varphi\delta.\left(\frac{1}{2-n-c}+\frac{3}{4-3n}\right).\text{cos}.(2-2n+m-c).z$$

—

$$-21 n^2 \phi \delta \left(\frac{1}{2-3n-c} + \frac{3}{8-12n}\right) . \cos. (2-2n-m-c).z$$
$$+\tfrac{3}{8} n^2 \pi^2 . \cos. (2+2p).z$$
$$+\tfrac{33}{16} n^2 \pi^2 \phi . \cos. (2+2p-c).z$$
$$+\frac{15 n^2 \pi^2 \phi^2}{16(1+p-c)} . \cos. (2+2p-2c).z.$$

His positis si in priori seriei termino substituantur numeri iidem, qui supra, & sit

$$\frac{2F}{1+\frac{1}{2}\phi^2}\left(1+3\phi . \cos. cz + \overline{3-\tfrac{3}{2}\phi^2}\right).t =$$
$$-0.010308\left(1+3\phi . \cos. cz + \overline{3-\tfrac{3}{2}\phi^2}\right)t,$$

constanti termino -0.010308 jungendo terminos alios $\frac{1}{2}n^2 - 3n^2\phi^2$, qui in postrema æquationis differentialis reductione in Probl. III. occurrebant, erunt priores æquationis ejusdem termini

$$\frac{ddt}{dz^2} + (1-3n^2).t = -0.007527 - 0.010308\left(3-\tfrac{3}{2}\phi^2\right).t - 2t^2$$
$$+\left(c^2-1+3n^2-(4-c^2-15n^2).t\right).\frac{\phi . \cos. cz}{1+\frac{3}{2}\phi^2}$$
$$-0.030924 . \phi . \cos. cz - \tfrac{3}{2}\phi^2 t . \cos. 2cz \text{ \&c.}$$

Quod si denique pro eliminando constanti termino fiat

$$t = -\frac{0.007527}{1-3n^2} + T = -0.0076555 + T$$
$$-2t^2 = +0.030622 . T - 2T^2,$$

supputatis viribus omnibus, & quæ sunt radio perpendiculares, & quæ juxta vectorem radium diriguntur, secundus æquationis differentialis terminus, qui apogæi lunaris motum exhibet, & priores alii termini subsequentes erunt ordine ut sequitur

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.98347 . T = -0.0004727 . \cos. cz - \tfrac{3}{2}\phi^2 T . \cos. 2cz - 2T^2$$
$$+\left(c^2-1+3n^2-(4-c^2-15n^2).T\right).\frac{\phi . \cos. cz}{1+\frac{3}{2}\phi^2} \text{ \&c.}$$

Corollarium I.

Primo igitur cum $u x^3 dz$, juxta Probl. I., actionem vis perpendicularis exprimat, atque ex ipsius quantitatis evolutione pro priori

priori parte differentiæ quæsitæ ϵ oriatur terminus $- 0.0076555$; patet actione virium omnium perturbatricium distantiam mediocrem Lunæ a Terra paulo minorem effici, quam esset in ellipsi illa, quæ sine hujusmodi vis projectilis variatione, sola gravitate in Terram, describeretur. Ita quidem ut si sit b semiaxis major ellipseos, ϵ differentia omnis vectoris radii, quæ ob perturbatrices vires inducitur, $- 0.0076555$ pars constans ipsius differentiæ, T pars alia, quæ solis quantitatibus variabilibus exprimitur; universim radius vector esse debeat

$$x = b - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \text{cos}. c z \ \&c. + \epsilon$$

$$= b - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \text{cos}. c z \ \&c. - 0.0076555 + \text{T}.$$

Quare unitatis loco accipiendo quantitatem omnem constantem $b - 0.0076555$, quæ veræ media distantia est, & differentiæ ϵ ex constanti, & variabili termino compositæ substituendo terminum tantum variabilem T, resolutio quantitatum x, x^2, x^3 &c. manebit eadem, quæ in Probl. II., & III. assumpta est, eaque orietur tantum differentialis æquationis variatio, quam in præsenti Problema indicavimus.

Corollarium II.

Deinde reassumpto calculo Coroll. I. Probl. III., & posito primum $c = 1$, scilicet motu omni ad primitivam ellipsim illam relato, quæ lunari orbitæ est propior, & quæ eadem velocitate media projectionis viribus centripetis decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum describeretur in plano immobili; evanescet rursus ex æquatione integrata, atque ex vectoris radii expressione terminus $\varphi . \text{cos}. z$, atque ipsius loco novus exsurget terminus $\varphi . \text{cos}. \sqrt{(0.98347)} . z = \varphi . \text{cos}. 0.9917 . z$. Posito autem $c = 0.9917$, & $1 - c = 0.0083$, annuus apogæi motus $\frac{15}{845}$ minor prodibit, quam ferant Astronomicæ observationes, ut in Coroll. III. Probl. III. dictum fuit. Et quidem cum dissensus hic omnis calculi, & observationum ex differentia tantum 0.0003 in supputando coefficiente secundi termini oriatur: coefficiens autem hujusmodi ex tot simul elementis, reductionibusque, ac correctionibus aliis pendeat, atque hæ rursus pendeant ex quantitatibus φ, π δ &c., quarum valoribus paululum immutatis differentia omnis potest evanescere; superioribus calculis problemati satis esse factum censebimus; inferius autem ut scrupulis, ac dubiis omnibus aditum præcludamus priores eosdem æqua-

æquationis differentialis terminos hoc ordine disponemus

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.9831714.T = -0.0004727.\text{cos}.cz - 0.0003.T - 2T^2 - \tfrac{3}{2}\varphi^2 T.\text{cos}.2cz$$
$$+ (c^2 - 1 + 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2).T).\frac{\varphi.\text{cos}.cz}{1+\frac{5}{2}\varphi^2} \text{ \&c.}$$

Corollarium III.

Ita disposita æquatione cum coefficiens secundi termini observationibus apogæi motus optime respondeat, in termino alio exiguo $-0.0003.T$ satis erit valorem differentiæ variabilis T prioribus approximationibus erutum substituere, & calculum ea ratione prosequi, quam in terminis $-2T^2 + \frac{\omega dT}{dz}$ &c. servabimus. Genesim autem coefficientis ejusdem considerando manifestum erit coefficientem omnem, atque inde prodeuntem apogæi lunaris motum, non ex termino tantum $(1-3n^2).T$, quem vires perturbatrices juxta vectorem radium agentes exhibent, sed ex binis etiam aliis terminis pendere, qui proxime se se destruunt, quique exsurgunt ex quantitatibus $\frac{2x^2 \int \omega x^2 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$, & $-2t^2$. Prior autem terminus expressionem involvit virium perpendicularium radio vectori lunaris orbitæ: alter ex differentia oritur terminorum x^2, & $\frac{x^2}{1-\varphi^2}$, adeoque etiam ex differentia gravitatis, ac vis centrifugæ, ut patet ex Coroll. II. Probl. I., & ex Probl. III. Itaque vires omnes Lunam sollicitantes ad promovendum apogæi locum conducent, & quæ juxta radium diriguntur, & quæ sunt radio perpendiculares, aliis autem viribus proxime se compensantibus apogæi motus expressioni mediocris vis perturbatricis juxta vectorem radium agentis fere omnis respondebit.

Corollarium IV.

Posito etiam $c^2 = 0.9831714$, & numeris aliis ut antea substitutis fiet $(c^2 - 1 + 3n^2).\varphi = 0.0000273$, atque ita terminus argumenti cz in differentiali æquatione supererit tantum $-0.0004454.\text{cos}.cz$: is autem, ut inferius videbimus, aliis ejusdem generis terminis, qui ex evolutione quantitatum $2x^2 \int \omega x^2 dz$, ωx^2 &c. oriuntur, sic imminuetur, ut habita ap-

approximationum ratione, in differentiali æquatione debeat omnino negligi. Hoc denique termino omisso, & præcedentibus aliis substitutionibus statuendo $-(4 - c^2 - 15 n^2 - \frac{15}{2}.\varphi^2).\varphi \mathrm{T}.\cos.cz = -2.91046.\varphi \mathrm{T}.\cos.cz$, ac $3\varphi^2 + \frac{9}{2} n^2 \varpi^2 = 0.009179$, & loco $\frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ intelligendo alios omnes seriei terminos subsequentes præter primum, cujus rationem jam in hoc problemate habuimus, differentialis æquatio Probl. III. hanc aliam formam induet

$$\begin{aligned} \frac{dd\mathrm{T}}{dz^2} + c^2\mathrm{T} = {} & \frac{\varpi x^3}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{2x^3\int \omega x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} - 0.0003.\mathrm{T} - 2\mathrm{T}^2 \\ & + (\sin.cz + \varphi.\sin.2cz)\left(\varphi\omega c x^4 - 4\varphi c.\frac{d\mathrm{T}}{dz}\right) \\ & - 2.9146.\varphi\mathrm{T}.\cos.cz - \tfrac{3}{2}\varphi^2\mathrm{T}.\cos.2cz + \frac{\omega d\mathrm{T}}{dz} \\ & - (\varphi.\cos.cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\cos.2cz - 0.009179 + \mathrm{T}).\frac{dd\mathrm{T}}{dz^2} + \frac{2d\mathrm{T}^2}{dz^2}. \end{aligned}$$

SCHOLION.

Hac igitur methodo, ac ratione inquirendi aberrationes Lunæ ab orbita elliptica, quæ ob vires omnes perturbatrices Solis induci possunt, æquatione differentiali sic resoluta ut radius vector ad sextam usque potestatem in iis terminis ascendat, qui vim mediocrem juxta vectorem radium exercitam involvunt, illud inprimis commodi habuimus quod vis eadem apogæi motum observationibus satis conformem illico exhibeat, alii autem termini analogi, & qui ex vi perpendiculari, & qui ex differentia gravitatis, ac vis centrifugæ exsurgunt, proxime se se destruant. Et quidem differentia illa exigua $-0.0003\,\mathrm{T}$ facile evanesceret æquatione omni differentiali in Probl. III. rursus divisa per constantem quantitatem, quæ coefficientem secundi termini tribus decem millesimis partibus majorem faciat. Ita enim apogæi motus cum observationibus penitus consentiet, aliorum vero coefficientium, & æquationum inde prodeuntium nulla orietur variatio, quæ possit sensibilis evadere. Ut vero nullus jam scrupulus in re difficillima supersit, in qua summorum Geometrarum studia, atque inventa non penitus aliis Geometris satisfacere visa sunt, posteriorem selegimus æquationis differentialis dispositionem. Ita enim, salvo apogæi motu, in termino exiguo $-0.0003\mathrm{T}$ valorem differentiæ T ex prioribus approximationibus elicitum substi-

ſtituendo, patebit poſtmodum non niſi evectionis æquationem $6''$ circiter minui oportere, alioſque terminos nova hac correctione ſenſibiliter non immutari. Hac autem differentiæ primo erutæ ſubſtitutione exiguos omnes æquationis differentialis terminos poſſe corrigi, & verum differentiæ ipſius valorem propius erui, apud Geometras minime in dubium revocabitur.

CAPUT TERTIUM.

DE ÆQUATIONE DIFFERENTIALI, ET RADIO VECTORE LUNARIS ORBITÆ.

PROBLEMA VII.

ÆQuationem differentialem lunaris orbitæ per partes ſingulas reſolvere.

Si qua ratione terminus $\frac{2x^3\int\varpi x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ in ſuperiore problemate fuit evolutus, in termino etiam ϖx^3 valor quantitatis ϖ ex Probl. IV., & valor poteſtatum x^4, x^7 ex Probl. III. accipiatur, ſtatuaturque

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2}n^2x^4.\,\text{coſ.}(2-2n).z = {} & \tfrac{3}{2}n^2(1+\tfrac{9}{2}\varphi^2).\,\text{coſ.}(2-2n).z\\ & +\tfrac{9}{2}n^2\varphi.\,\text{coſ.}(2-2n\pm c).z\\ & +\tfrac{63}{8}n^2\varphi^2.\,\text{coſ.}(2c+2n-2).z\end{aligned}$$

terminis aliis ſimili modo reductis, atque collectis fiet

$$\begin{aligned}\frac{\varpi x^3}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = {} & \frac{9n^2}{8a}(1+\tfrac{11}{2}\varphi^2).\,\text{coſ.}(1-n).z\\ & +\tfrac{3}{2}n^2(1+3\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\varpi^2).\,\text{coſ.}(2-2n).z\\ & +\frac{15n^2}{8a}.\,\text{coſ.}(3-3n).z\\ & +\tfrac{9}{2}n^2\varphi(1-\tfrac{2}{3}n)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}(2-2n\pm c).z\\ & +\frac{63n^2\varphi}{16a}.\,\text{coſ.}(c+n-1).z\\ & +\frac{9n^2\varphi^2}{8}(7+9n)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}(2c+2n-2).z\\ & +\tfrac{3}{2}n^2\delta(1+3\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{coſ.}\,mz\end{aligned}$$

$$-\tfrac{9}{2}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(c\pm m).z$$
$$-\frac{9n^2\delta}{8a}.\,\text{cof.}\,(1-n+m).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21}{4}n^2\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n-m).z$$
$$+\tfrac{9}{4}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n+m-c).z$$
$$-\frac{63}{4}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n-m-c).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2(1-\tfrac{3}{2}\varphi^2).\,\text{cof.}\,(2n+2p).z$$
$$+\tfrac{3}{8}n^2\pi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p).z$$
$$+\tfrac{9}{8}n^2\varphi\pi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p-c).z$$
$$+\frac{63}{32}n^2\varphi^2\pi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p-2c).z.$$

Iisdem etiam fubftitutionibus, eademque femper ratione eruetur

$$\omega\varphi c x^4.\,\text{fin.}\,cz = \mp\tfrac{3}{4}n^2c\varphi(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof.}\,(2-2n\mp c).z$$
$$+3n^2\varphi^2.\,\text{cof.}\,(2-2n).z$$
$$-\frac{3n^2c\varphi}{16a}.\,\text{cof.}\,(c+n-1).z$$
$$-\tfrac{3}{2}n^2c\varphi^2(\tfrac{1}{4}+n).\,\text{cof.}\,(2c+2n-2).z$$
$$-\tfrac{3}{8}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n+m-c).z$$
$$+\frac{21}{8}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(2-2n-m-c).z$$
$$-\frac{3}{16}n^2\pi^2\varphi.\,\text{cof.}\,(2+2p-c).z$$
$$\omega c\varphi^2x^4.\,\text{fin.}\,2cz = -\tfrac{3}{4}n^2c\varphi^2(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof.}\,(2c+2n-2).z$$
$$-\frac{3}{16}n^2\pi^2\varphi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p-2c).z.$$

Ut vero exiguorum etiam terminorum habeatur ratio, in quibus occurrit eadem, quæ quæritur, differentia radii elliptici, & veri vectoris radii, ducta in exiguas quantitates φ, φ^2, aut n^2, loco differentiæ quæfitæ T ex priorum terminorum integratione affumemus terminum quemcumque formæ $\mu.\,\text{cof.}\,\Delta z$, ut fit $dT = -\mu\Delta.\,\text{fin.}\,\Delta z.dz$, & $ddT = -\mu\Delta^2.\,\text{cof.}\,\Delta z.dz^2$. Sic fiet

— 2.

$$-2.91046.\varphi \mathrm{T}.\,\mathrm{cof.}\, cz = -1.45523\,\mu\varphi.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm c).z$$

$$-4\varphi c.\,\mathrm{fin.}\, cz.\frac{d\mathrm{T}}{dz} = \mp 2c\mu\varphi\Delta.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm c).z$$

$$-\varphi.\,\mathrm{cof.}\, cz.\frac{dd\mathrm{T}}{dz^2} = \tfrac{1}{2}\mu\varphi\Delta^2.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm c).z$$

$$-\tfrac{3}{2}\varphi^2\mathrm{T}.\,\mathrm{cof.}\, 2cz = -\tfrac{3}{4}\mu\varphi^2.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm 2c).z$$

$$-4\varphi^2.\,\mathrm{fin.}\, 2cz.\frac{d\mathrm{T}}{dz} = \mp 2\mu\varphi^2\Delta.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm 2c).z$$

$$-\tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\mathrm{cof.}\, 2cz.\frac{dd\mathrm{T}}{dz^2} = \tfrac{1}{4}\mu\varphi^2\Delta^2.\,\mathrm{cof.}(\Delta \pm 2c).z.$$

Ex terminis etiam $-2\mathrm{T}^2 + \frac{2d\mathrm{T}^2}{dz^2} - \frac{\mathrm{T}.dd\mathrm{T}}{dz^2}$ eruetur terminus alius $-\mu^2(1+\tfrac{1}{2}\Delta^2).\,\mathrm{cof.}\,2\Delta z$: neglectoque ob parvitatem $\frac{\varpi d\mathrm{T}}{dz}$, & terminis omnibus simul collectis, atque ordinatis æquatio differentialis Coroll. IV. Probl. VI. in hanc aliam resolvetur $\frac{dd\mathrm{T}}{dz^2} + c^2\mathrm{T}$

$$= \frac{3n^2}{4a}\Big(\frac{1-\frac{1}{2}\varphi^2}{1-n} + \tfrac{3}{2}\big(1+\tfrac{11}{2}\varphi^2\big)\Big).\,\mathrm{cof.}(1-n).z$$

$$+\tfrac{3}{2}n^2\Big(\frac{1+\varphi^2}{1-n} + 1 + \varphi^2\big(3+8n+\frac{6}{2-2n-c}+\frac{6}{2-2n+c}\big)\Big)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\mathrm{c}.(2-2n).z$$

$$+\frac{25n^2}{8a}.\,\mathrm{cof.}(3-3n).z$$

$$+3n^2\varphi\Big(\tfrac{3}{2}+\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n-c}-\tfrac{1}{4}c+3n-\tfrac{3}{2}\varphi^2k\Big)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\mathrm{cof.}(2-2n-c).z$$

$$+3n^2\varphi\Big(\tfrac{3}{2}+\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n+c}+\tfrac{1}{4}c\Big)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\mathrm{cof.}(2-2n+c).z$$

$$-\frac{3n^2\varphi}{8a}\Big(\frac{5}{c+n-1}-13\Big).\,\mathrm{cof.}(c+n-1).z$$

$$-3n^2\varphi^2\Big(k+\frac{7c}{8}-\frac{21}{8}-\frac{3}{4-4n}-\frac{3}{2-2n-c}-\frac{47n}{8}\Big)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\mathrm{c}.(2c+2n-2).z$$

$$-\tfrac{3}{2}n^2\delta(1+3\varphi^2)(1-\tfrac{3}{2}\pi^2).\,\mathrm{cof.}\,mz$$

$$-\tfrac{9}{2}n^2\varphi\delta.\,\mathrm{cof.}(c+m).z$$

—

$$-\tfrac{9}{2}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(c-m).z$$
$$-\frac{15n^2\delta}{8a}.\,\text{cof.}\,(1-n+m).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\delta\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\,\text{cof.}\,(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21}{4}n^2\delta\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right).\,\text{cof.}\,(2-2n-m).z$$
$$+\tfrac{3}{2}n^2\varphi\delta\left(\frac{1}{2-n-c}+\frac{3}{4-2n}+\frac{5}{4}\right).\,\text{cof.}\,(2-2n+m-c).z$$
$$-21n^2\varphi\delta\left(\frac{1}{2-3n-c}+\frac{3}{8-12n}+\frac{5}{8}\right).\,\text{cof.}\,(2-2n-m-c).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2\left(1-\tfrac{3}{2}\pi^2\right).\,\text{cof.}\,(2n+2p).z$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p).z$$
$$+3n^2\varphi\pi^2.\,\text{cof.}\,(2+2p-c).z$$
$$+\frac{3}{16}n^2\varphi^2\pi^2\left(\frac{5}{1+p-c}+9\tfrac{1}{2}\right).\,\text{cof.}\,(2+2p-2c).z$$
$$+\mu\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Delta^2\mp 2c\Delta-1.45523\right).\,\text{cof.}\,(\Delta\pm c).z$$
$$+\mu\varphi^2\left(\tfrac{3}{4}\Delta^2\mp 2\Delta-\tfrac{3}{4}\right).\,\text{cof.}\,(\Delta\pm 2c).z$$
$$-0.009179.\mu\Delta^2.\,\text{cof.}\,\Delta z-\mu^2\left(1+\tfrac{1}{2}\Delta^2\right).\,\text{cof.}\,2\Delta z.$$

Corollarium I.

Novemdecim priores, potioresque æquationis totius termini pertinent ad formam illam, cujus accurate integrandæ methodum in Lem. X. jam exposuimus. Termini autem quatuor posteriores, cum sint exigui, ad eamdem formam facile reducentur, si valor differentiæ vectoris radii ex priorum omnium terminorum integratione erutus in ipsis terminis posterioribus qua indicavimus ratione substituatur, ac deinde reassumpto calculo priores termini, posterioresque, alii ex aliis, corrigantur, ut moris est in seriebus infinitis. Et cum novæ hujusmodi correctiones reassumpto calculo minores fiant, nec nisi valde exiguæ sint omnes, ita ad verum vectoris radii valorem accedere quisque poterit quantum voluerit.

Co-

Corollarium II.

Ex ipſa vero, qua coefficientes ſimul collegimus, ratione manifeſtum eſt, quæ in diſtinguendis claſſibus, atque ordinibus, ſuperioribus, & inferioribus quantitatum omnium ſit difficultas. Scilicet cum quantitates exiguæ φ, δ, π, n, $\frac{1}{a}$ ejuſdem ordinis cenſeri debeant, non tamen ita exiguæ ſunt ſingulæ, ut ob coefficientium varietatem inferioris etiam ordinis dimenſio quantitatem conſtituat ordinis non ſuperioris. Quæ cum difficultas ſpeciebus numeros ſubſtituendo evaneſcat, cumque ita quantitates illæ dumtaxat negligi certo poſſint, quæ decimales inferiorum ordinum conſtituunt; ut totam calculi ſeriem, apud authores alios ſuppreſſam, exponamus per partes ſingulas, ſpeciebus decimales numeros ſubſtituemus, ut etiam in corollario Probl. V. præſtitimus.

Problema VIII.

Æquationis ejuſdem integratione definire vectorem radium lunaris orbitæ.

Calculi ſatis moleſti ſeriem pro duobus præcipuis terminis exſcribemus argumenti $(2-2n).z$, & $(2-2n-c).z$. Et primo quidem ſi pro ſpeciebus c, n, φ, π iidem numeri ſubſtituantur, quos in corollario eodem Probl. V. indicavimus, poſito $c^2-(2-2n)^2=-2.440796$, & $c^2-(2-2n-c)^2=0.245554$, juxta Lem. X., & XI. priori integratione prodibit

$$T=\frac{0.01773861}{-2.440796}.\text{coſ.}(2-2n).z+\frac{0.004130097}{0.245554}.\text{coſ.}(2-2n-c).z.$$

Deinde poſito $\mu=-\frac{0.01773861}{2.440796}=-0.00726755$, & $\Delta=2-2n=1.8503966$, qua ſupra innuimus correctionis methodo evadet

$$\frac{-0.009179}{-2.440796}.\mu\Delta^2.\text{coſ.}\,\Delta z=-0.00009358.\text{coſ.}(2-2n).z,$$

ac fiet primus integratæ æquationis terminus $-0.00736113.\text{c.}(2-2n).z$. Poſito etiam $\Delta=2-2n$, & $\mu=-0.00736113$, fiet

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2+2c\Delta-1.45523).\text{c.}(\Delta-c).z=-0.0015809297.\text{c.}(2-2n-c).z,$$

atque exceſſum ſuperioris numeri 0.004130097 dividendo per 0.245554 pro coefficiente integrati termini habebimus 0,0103813:

&

& quia posito $\mu = 0.0103813$, & $\Delta = 2 - 2n - c = 0.8588466$ prodit $\frac{-0.009179}{0.245554} \cdot \mu\Delta^2 = -0.0002862$, erit totus hujusmodi terminus

$0.0100951 \cdot \text{cos}(2 - 2n - c) \cdot z$.

At rursus posito $\mu = 0.0100951$, & $\Delta = 2 - 2n - c$, ex termino $\mu\varphi(\frac{1}{4}\Delta^2 - 2c\Delta - 1.45523) \cdot \text{cos}(\Delta + c) \cdot z$ alius in differentiali æquatione exsurget terminus $-0.001540422 \cdot \text{cos}(2 - 2n) \cdot z$: eoque per -2.440796 diviso, æquationi integratæ accedet $0.00063112 \cdot \text{cos}(2 - 2n) \cdot z$, ac fiet denuo correctus argumenti hujus terminus $-0.00673 \cdot \text{cos}(2 - 2n) \cdot z$. Qua vero ratione ex priori termino $-0.00736113 \cdot \text{cos}(2 - 2n) \cdot z$ in æquatione differentiali eruebatur terminus $-0.0015809297 \cdot \text{cos}(2 - 2n - c) \cdot z$, eadem etiam ex termini prioris correctione $0.00063112 \cdot \text{cos}(2 - 2n) \cdot z$ eruetur terminus alius $0.00013554 \cdot \text{cos}(2 - 2n - c) \cdot z$: ac simili modo integrando, & divisione coefficientis per 0.245554 facta, integrali æquationi accedet terminus $0.0005519 \cdot \text{cos}(2 - 2n - c) \cdot z$: & reassumpta similiter præcedenti alia correctione, terminum hunc ipsum minuendo partibus $\frac{2862}{106470}$ fiet totus argumenti ejusdem terminus $0.010632 \cdot \text{cos}(2 - 2n - c) \cdot z$

Quod si continuato calculo assumamus $\mu = -0.00673$, & $\Delta = 2 - 2n$, fiet

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{4}\Delta^2 - 2c\Delta - 1.45523) \cdot \text{cos}(\Delta + c) \cdot z = 0.0012712 \cdot \text{cos}(2 - 2n + c) \cdot z$$

$$\mu\varphi^2(\tfrac{1}{4}\Delta^2 + 2\Delta - \tfrac{1}{4}) \cdot \text{cos}(\Delta - 2c) \cdot z = -0.00007665 \cdot \text{cos}(2c + 2n - 2) \cdot z:$$

ac pariter assumendo $\mu = 0.010632$, & $\Delta = 2 - 2n - c$ prodibit

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2 + 2c\Delta - 1.45523) \cdot \text{cos}(\Delta - c) \cdot z = 0.0003588 \cdot \text{cos}(2c + 2n - 2) \cdot z$$

$$\mu\varphi^2(\tfrac{1}{4}\Delta^2 - 2\Delta - \tfrac{3}{4}) \cdot \text{cos}(\Delta + 2c) \cdot z = -0.0000727 \cdot \text{cos}(2 - 2n + c) \cdot z.$$

Cum igitur binis aliis coefficientibus terminorum ejusdem nominis ex æquatione differentiali superioris problematis acceptis, ac speciebus singulis ut antea in numeros conversis sit

$$3n^2\varphi\left(\tfrac{3}{2} + \frac{3}{4 - 4n} + \frac{2}{2 - 2n + c} + \tfrac{1}{4}c\right)(1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) = 0.00298329$$

$$-3n^2\varphi^2\left(k + \frac{7c}{8} - \frac{21}{8} - \frac{3}{4 - 4n} - \frac{3}{2 - 2n - c} - \frac{47n}{8}\right)(1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) = -0.000751134$$

jungendo simul coefficientes, & pro habenda integratione terminum ar-

argumenti $(2-2n+c).z$ dividendo per $c^2-(2-2n+c)^2=-7.0935$, terminum vero argumenti alterius $(2c+2n-2).z$ per $c^2-(2c+2n-2)^2=0.96556$, habebimus in æquatione integrali duos alios terminos

$$-0.0005895.\text{cos}.(2-2n+c).z-0.0004857.\text{cos}.(2c+2n-2).z.$$

Ex his autem posterioribus terminis integralis ipsius æquationis, atque ex aliis æquationis differentialis terminis $\mu\varphi(\frac{1}{2}\Delta^2\mp 2c\Delta-1.45523).\text{cos}.(\Delta\pm c).z$, & $\mu\varphi^2(\frac{1}{4}\Delta^2\mp 2\Delta-\frac{3}{4}).\text{cos}.(\Delta\pm 2c).z$, novæ orientur priorum terminorum correctiones, quæ licet exiguæ sint, ad majorem tamen approximationum diligentiam minime omitti debent. Videlicet si fiat primo $\mu=-0.0005895$, $\Delta=2-2n+c$, ac deinde $\mu=-0.0004857$, $\Delta=2c+2n-2=0.1327034$, & uterque terminus argumenti $2z-2nz$, & $2z-2nz-cz$ ex correctionibus illis prodiens in æquatione differentiali iisdem, quibus antea, divisionibus integretur, alii integrales termini habebuntur

$$0.000109.\text{cos}.(2-2n).z+0.0000918.\text{cos}.(2-2n-c).z,$$

eruntque ultimo correcti termini hujus nominis

$$-0.006621.\text{cos}.(2-2n).z+0.0107238.\text{cos}.(2-2n-c).z.$$

In aliis terminis, cum singulas correctiones ob parvitatem non ita longe perducere oporteat, calculus etiam omnis erit facilior. Sic posito $\frac{1}{a}=\frac{1}{382}$, & $c^2-(1-n)^2=0.12718$, & in aliarum specierum locum, ut antea, numeris substitutis, fiet alter integratæ æquationis terminus $0.00022492.\text{cos}.(1-n).z$. Deinde posito $\mu=0.00022492$, & $\Delta=1-n=0.9251983$ fiet $-0.009179\mu\Delta^2=-0.000001767$, dividendoque per 0.12718, & quotum simul copulando residuus hujusmodi termini coefficiens evadet 0.00021103. Iisdem etiam valoribus specierum μ, & Δ substitutis fiet

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2+2\Delta c-1.45523).\text{cos}.(\Delta-c).z=0.0000095.\text{cos}.(c+n-1).z,$$

copulandoque coefficientem $-\frac{3n^2\varphi}{8a}(\frac{5}{c+n-1}-13)=-0.000019145$,

dividendoque per $c^2-(c+n-1)^2=0.97877$, novus in integrali habebitur terminus $-0.000009855.\text{cos}.(c+n-1).z$. Rursus si hic ipse terminus loco differentiæ T accipiatur, seu loco $\mu.\text{cos}.\Delta z$, ob parvitatem quantitatis $c+n-1$ aliis correctionibus neglectis erit

$-1.45523\,\mu\varphi.\,\text{cof.}(\Delta-c).z=0.00000078447.\,\text{cof.}(1-n).z,$
dividendoque per 0.12718, ut in æquatione integrali fit coefficientis correctio 0.00000617, erit terminus integer 0.0002172. cof.$(1-n).z$.

Quod si insuper assumamus excentricitatem terrestris orbitæ $\delta=0.0168$, & quantitates m, & n statuamus proxime inter se æquales, erit

$$-\tfrac{3}{2}\delta n^2.(1+3e^2)(1-\tfrac{3}{2}\pi^2).\frac{\text{cof.}\,mz}{c^2-m^2}=-0.000143789.\,\text{cof.}\,mz:$$

ac deinde posito $\Delta=m=n$, & $\mu=-0.000143789$, erit

$$-\mu\varphi(1.45523\pm 2\Delta).\,\text{cof.}(\Delta\pm c).z=0.000012622.\,\text{cof.}(c+m).z$$
$$+0.0000102626.\,\text{cof.}(c-m).z.$$

Cum itaque in æquatione differentiali esse debeat

$$-\tfrac{3}{2}n^2 e\delta.\,\text{cof.}(c\pm m).z=-0.00002313836.\,\text{cof.}(c\pm m).z$$

signi superioris terminum dividendo per $c^2-(c+m)^2=-0.154$, terminum autem signi inferioris per 0.1427; in integrali æquatione binos alios terminos obtinebimus

$$+0.0000683.\,\text{cof.}(c+m).z-0.0000903.\,\text{cof.}(c-m).z$$

At insuper posito $\Delta=c\pm m$, & coefficientibus substitutis, ex correctione omni $\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2\mp 2\Delta-1.45523).\,\text{cof.}(\Delta\pm c).z$, pro differentiali æquatione addendus exsurget terminus 0.0000007112. cof.mz. Hunc igitur dividendo per c^2-m^2, correctus argumenti ejusdem terminus erit dumtaxat $-0.00014306.\,\text{cof.}\,mz$.

Erit etiam $-\dfrac{15n^2\delta}{8a}.\dfrac{\text{cof.}(1-n+m).z}{c^2-1}=0.0000274.\text{cof.}(1-n+m).z:$
ex quo termino cum solitis substitutionibus eruatur 0.0000015. cof.$(1-n+m-c).z$, cumque in differentiali æquatione iisdem, quibus supra, calculis alius argumenti hujus terminus erui possit, cujus coefficiens sit

$$-\frac{3n^2e\delta}{8a}\left(\frac{5}{1-c}-10\tfrac{1}{2}\right)=-0.0000029,$$ & cum denique coefficiens termini hujusmodi in differentiali, atque integrali æquatione proxime idem manere debeat, fiet integer terminus $-0.0000014.\,\text{cof.}(1-n+m-c).z$. Hic vero rursus neglectis ob parvitatem quantitatibus $\dfrac{dT}{dz}$, & $\dfrac{ddT}{dz^2}$, erit

— I.

$-1.45523.\mu\varphi.\text{cof.}(\Delta+c).z=0.00000011144.\text{cof.}(1-n+m).z,$
dividendoque per $c^2-1=-0.01683$, & fuperiorem terminum copulando terminus omnis correctus erit $0.0000208.\text{cof.}(1-n+m).z.$

Infuper continuata fubftitutionum earumdem methodo prodibit

$$\tfrac{3}{4}n^2\delta\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\text{cof.}\frac{(2-2n+m).z}{c^2-(2-n)^2}=-0.00005279.\text{cof.}(2-2n+m).z$$

$$-\tfrac{21}{4}n^2\delta\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right).\text{cof.}\frac{(2-2n-m).z}{c^2-(2-3n)^2}=0.00048368.\text{cof.}(2-2n-m).z.$$

Inde autem ope termini $\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2+2c\Delta-1.45523).\text{cof.}(\Delta-c).z$ more folito eruentur pro differentiali æquatione bini alii termini

$-0.000012273.\text{cof.}(2-2n+m-c).z$
$+0.000096367.\text{cof.}(2-2n-m-c).z.$

Cum itaque ex æquatione ipfa excerptis argumenti ejufdem terminis, & fubftitutis numeris fint bini coefficientes

$$\tfrac{3}{2}n^2\varphi\delta\left(\frac{1}{2-n-c}+\frac{3}{4-2n}+\frac{5}{4}\right)=0.00002391$$

$$-21n^2\varphi\delta\left(\frac{1}{2-3n-c}+\frac{3}{8-12n}+\frac{5}{8}\right)=-0.0002508135,$$

& coefficientibus homologis fimul junctis, & divifione prioris quidem per 0.11147, alterius vero per 0.368515 facta, erunt alii integrales termini

$0.00001044.\text{cof.}(2-2n+m-c).z$
$-0.0004191.\text{cof.}(2-2n-m-c).z.$

At rurfus pofteriore hoc termino pro $\mu.\text{cof.}\Delta z$ affumpto evadet
$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2-2c\Delta-1.45523).\text{cof.}(\Delta+c).z=0.000062263.\text{cof.}(2-2n-m).z,$
dividendoque per $c^2-(2-3n)^2=-2.16958$, & quotum -0.0000287 a coefficiente alio fubtrahendo, fiet terminus correctus $0.000454.\text{cof.}(2-2n-m).z$. Simili correctione terminus alter evadet $-0.0000523.\text{cof.}(2-2n+m).z$. Et ne quidpiam in correctionibus hifce exiguis omittamus, ficuti ex termino

$0.00048368.\text{cof.}(2-2n-m).z$ eruebatur correctio
$0.000096367.\text{cof.}(2-2n-m-c).z$, ita etiam ex differentia

 −0.

$-0.0000287 \cdot \text{cof.}(2-2n-m).z$ eruetur correctio alia
$-0.000005718 \cdot \text{cof.}(2-2n-m-c).z$:

dividendoque per 0.368515, & quotum superiori termino adjungendoque prodibit coefficiens -0.0004347: ac pariter si neque alia quantitatis $-0.009179.\mu\Delta^2.\text{cof.}\Delta z$ correctio exigua negligatur, fiet omnis argumenti hujus terminus $-0.0004281.\text{cof.}(2-2n-m-c).z$.

Denique cum sit $p = \frac{1}{4}n^2$, substitutis numeris ordine habebimus

$$\tfrac{3}{4}n^2\pi^2.\frac{\text{cof.}(2+2p).z}{c^2-(2+2p)^2} = -0.0000112 \cdot \text{cof.}(2+2p).z$$

$$\tfrac{3}{4}n^2\pi^2.\frac{\text{cof.}(2n+2p).z}{c^2-(2n+2p)^2} = 0.00003526 \cdot \text{cof.}(2n+2p).z$$

$$3n^2\pi^2\varphi.\frac{\text{cof.}(2+2p-c).z}{c^2-(2+2p-c)^2} = -0.000146 \cdot \text{cof.}(2+2p-c).z.$$

Posito autem $\mu = -0.000146$, & $\Delta = 2+2p-c = 1.016843$, erit

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2 \mp 2\Delta - 1.45523).\text{cof.}(\Delta \pm c).z = 0.0000236.\text{cof.}(2+2p).z$$
$$-0.000008344.\text{cof.}(2+2p-2c).z:$$

& priorem coefficientem dividendo per $c^2-(2+2p)^2$, seu proxime -3, fiet totus hujus generis terminus $-0.0000019.\text{cof.}(2+2p).z$, posteriori vero coefficienti adjungendo

$\frac{3}{16}n^2\pi^2\varphi^2\left(\frac{5}{1+p-c}+9\tfrac{1}{2}\right) = 0.000010155$, & differentiam dividendo per $c^2-(2+2p-2c)^2 = 0.98253$, denique habebimus $0.0000018\overline{4}.\text{cof.}(2+2p-2c).z$.

Eadem calculi serie minores alii quicumque termini supputari possent qui ex evolutione quantitatum $2x^2\int \omega x^2 dz$, & $\varpi x^2 dz$ similiter exsurgerent. Ii vero ob coefficientium parvitatem ad calculorum luxum augendum potius quam perficiendam Lunæ theoriam conducerent. Ut ergo terminis præcedentibus contenti simus, qui cum Majeri tabulis, æquationibusque libri hujus initio recensitis comparari possunt, collectis omnibus in unam summam, & juxta Lem. X. & XI. prioris libri pro coefficiente argumenti cz addita summa coefficientium aliorum omnium inverso signo acceptorum, erit differentia vectoris radii lunaris orbitæ, quæ ob perturbatrices vires inducitur,

T=

$$
\begin{aligned}
T = {} & 0.0002172 \cdot \text{cos.}\,(1-n).z \\
& -0.006621 \cdot \text{cos.}\,(2-2n).z \\
& -0.000007 \cdot \text{cos.}\,(3-3n).z \\
& +0.0107238 \cdot \text{cos.}\,(2-2n-c).z \\
& -0.0005895 \cdot \text{cos.}\,(2-2n+c).z \\
& -0.000009855 \cdot \text{cos.}\,(c+n-1).z \\
& -0.0004857 \cdot \text{cos.}\,(2c+2n-2).z \\
& -0.00014306 \cdot \text{cos.}\,mz \\
& +0.0000683 \cdot \text{cos.}\,(c+m).z \\
& -0.0000903 \cdot \text{cos.}\,(c-m).z \\
& +0.0000208 \cdot \text{cos.}\,(1-n+m).z \\
& -0.0000014 \cdot \text{cos.}\,(1-n+m-1).z \\
& -0.0000523 \cdot \text{cos.}\,(2-2n+m).z \\
& +0.000454 \cdot \text{cos.}\,(2-2n-m).z \\
& +0.00001044 \cdot \text{cos.}\,(2-2n+m-c).z \\
& -0.0004281 \cdot \text{cos.}\,(2-2n-m-c).z \\
& +0.00003526 \cdot \text{cos.}\,(2n+2p).z \\
& -0.000019 \cdot \text{cos.}\,(2+2p).z \\
& -0.000146 \cdot \text{cos.}\,(2+2p-c).z \\
& +0.00000184 \cdot \text{cos.}\,(2+2p-2c).z \\
& -0.002938 \cdot \text{cos.}\,cz.
\end{aligned}
$$

COROLLARIUM I.

Ex tota calculi ſerie manifeſtum eſt coefficientes plurium terminorum, qui in æquatione differentiali exigui ſunt, integratione habita maxime augeri. Patet etiam terminos alios, qui in differentiali, atque integrali æquatione exigui manent, multiplicatione facta per ſinus, & coſinus quorumdam angulorum evolvi in terminos, qui integratione maxime augentur. Ita ex termino exiguo argumenti $2z+2pz$ bini alii educuntur termini, qui pro argumento habent $2z+2pz-cz$, & $2z+2pz-2cz$, quorum prior priori hac integratione coefficientem multo auctum habet, alter ſequenti integratione, cum variationes motus ex variationibus vectoris radii colligentur, fere tantumdem augebitur. Eamdem eſſe rationem aliorum terminorum in corollariis Probl. IV. jam adnotavimus.

COROLLARIUM II.

Falſum eſt igitur aut æquationes augeri in ſimplici ratione temporum, aut poſſe in æquatione integrata negligi terminos, qui in

in æquatione differentiali præ cæteris exigui ſunt, aut univerſim in tractandis problematis trium corporum ſe ſe attrahentium eſſe aliquid, quod ſola coefficientium parvitate debeat negligi. Idcirco erronea eſt ea methodus, qua in elementis motuum variabilium Lunæ, aut etiam Jovis, & Saturni accipiendis negliguntur quædam elementa, quæ præ cæteris videntur ordinis inferioris. Æquationes motus Jovis, & Saturni accurata methodo in ſubſequenti libro ſupputabimus. Ut ſatis accuratum motum lunarium calculum hic ineamus terminos illos tantum omiſimus, qui binis integrationibus ſenſibiles nequeunt evadere, eaſque tantum neglеximus coefficientium correctiones, quæ decimalem aliquam notam notæ dumtaxat ultimæ adjicerent.

Corollarium III.

Potiorem autem radii vectoris terminum formæ $h.\text{cos}.(2-n-c).z$ conſiderando manifeſtum eſt, quod cum $\varphi.\text{cos}.cz$ ſit prior terminus variabilis, qui vectorem radium definit in ellipſi circa Terram deſcripta, poſito quod excentricitas conſtans ſit φ, & angularis diſtantia a ſumma apſide cz; terminus $h.\text{cos}.(2-2n-c).z$ exprimet differentiam vectoris radii in ellipſi, in qua excentricitas ad tempus datum ſit $\varphi + h.\text{cos}.(2c+2n-2).z$, & aberratio apſidum a loco medio $\frac{h.\text{ſin}.(2c+2n-2).z}{\varphi+h.\text{cos}.(2c+2n-2).z}$. Has enim quantitates excentricitatis variabilis, & inæqualis progreſſus apſidum ſubſtituendo, loco $\varphi.\text{cos}.cz$ habebimus

$$\left(\varphi+h.\text{cos}.(2c+2n-2).z\right).\text{cos}.\left(cz+\frac{h.\text{ſin}.(2c+2n-2).z}{\varphi+h.\text{cos}.(2c+2n-2).z}\right):$$

quæ quantitas more ſolito reſoluta abibit in hanc aliam

$$\varphi.\text{cos}.cz+h.\text{cos}.(2-2n-c).z.$$

Corollarium IV.

Atque inde eruetur elegans theorema, quod initio Lib. II. indicavimus, & quod Newtonus ex obſervationibus potius viſus eſt quam ex theoria collegiſſe. Scilicet ſi locus Terræ ſit T, fig. 35., & ſit TC excentricitas media lunaris orbitæ, centroque C, ac radio CB, qui exæquet coefficientem eumdem h, deſcribatur circulus DBA, accipiaturque angulus BCD æqualis duplæ diſtantiæ Solis a loco apogæi medio $2cz+2nz-2z$, exprimet TK, ſeu TD

TD excentricitatem veram pro dato apogæi loco, & BTD æquationem motus mediocris apogæi Lunæ. Eſt enim $c z$ diſtantia Lunæ ab apogæo, & $z - n z$ diſtantia Lunæ a Sole, adeoque eſt Solis diſtantia ab apogæo $c z + n z - z$. Et quidem cum linea apſidum lunaris orbitæ ad Solem dirigetur, poſito $\text{coſ.}(2c + 2n - 2).z = 1$, excentricitas fiet maxima, & contra in quadraturis apſidum cum Sole evadet minima. Apogæum inſuper progredietur ultra locum medium quando in oppoſitione, vel conjunctione Solis verſabitur, ac regredietur in quadraturis, eritque tota excentricitatis variatio 0.0107238, quam Newtonus aſſumpſit partium $0.01172\frac{1}{4}$, & aberratio apſidum a loco medio erit $\frac{107 \cdot 238}{547}$, qui eſt ſinus $11° 19'$.

Corollarium V.

Erunt etiam bini alii termini, qui reſpondent radio vectori ellipſeos Terræ concentricæ, circa centrum revolutæ, & Solem verſus tranſpoſitæ $\frac{-1}{151}.\text{coſ.}(2-2n).z + \frac{1}{4604}.\text{coſ.}(1-n).z$: & ſi prioris termini coefficiens, ſecluſis correctionibus omnibus, aſſumatur ut primo prodiit, fiet -0.00726755, ſive $\frac{1}{139}$, ut etiam in Probl. V. Lib. II. ſtatutum eſt. Alios autem terminos omnes conſiderando manifeſtum erit quibus apogæi, nodorum, Soliſque aſpectibus radius vector lunaris orbitæ aliqua ſui parte augeri, aut minui debeat. Et quia parallaxis horizontalis Lunæ æqualis eſt Lunæ diametro per vectorem radium diviſæ; ſi parallaxis mediocris aſſumatur ut antea $57' 18''$, dividaturque per $1 + 0.0547.\text{coſ.}cz - 0.006621.\text{coſ.}(2-2n).z + 0.0107238.\text{coſ.}(2-2n-c).z$ &c., habebuntur æquationes omnes parallaxeos ejuſdem horizontalis. Erunt autem præcipuæ

$$57' 18'' - 3' 8''.\text{coſ.}cz - 36.87''.\text{coſ.}(2-2n-c).z$$
$$+ 22.75''.\text{coſ.}(2-2n).z + 2''.\text{coſ.}(2-2n+c).z \text{ \&c.}$$

Scholion.

Bini autem termini, qui anomaliæ angulum involvunt, ſingillatim conſiderari debent, & qui ultimo in æquatione integrata prodiit $-0.002938.\text{coſ.}cz$, & qui primo in æquatione differentiali Coroll. IV. Probl. VI. occurrebat $-0.0004454.\text{coſ.}cz$. Et qui-

quidem integralis terminus $-0.002938 \cdot \text{cos}.cz$, cum indicet æquationem centri aliquantulum ob vires perturbatrices minorem effici, superiores omnes productorum x^2, x^3 &c. resolutiones minime afficiet, si in expressione vectoris radii $x = 1 + \phi . \text{cos}.cz$ &c. $+ T$ pro quantitate ϕ assumatur, ut supra fecimus, excentricitas vere mediocris, & sit $\phi . \text{cos}.cz$ terminus omnis argumento cz respondens, ac T referat alios terminos, qui alios angulos in argumentis admixtos referunt. Quod vero spectat ad exiguum illum æquationis differentialis terminum $-0.0004454 . \text{cos}.cz$, qui juxta Lem. XII. integratione facta ad circulares arcus deduceret, observandum est quantitatum omnium minorum ratione habita alios ejusdem generis terminos exsurgere, qui priorem terminum fere destruunt. Reassumptis enim calculis superioribus, præter quantitates illas, quas recensuimus, ex evolutione terminorum

$2x^3 \int \omega x^3 dz$	eruentur	$-12n^2 \int . T dz . \text{sin}.(2-2n).z$
	termini	$+\frac{9}{2} n^2 T . \text{cos}.(2-2n).z$
		$+18 \phi n^2 T . \text{cos}.(2-2n-c).z$
ωx^4		$+9n^2 T . \text{cos}.(2-2n).z$
$\frac{\omega . dT}{dz}$		$+\frac{3}{2} n^2 . \frac{dT}{dz} . \text{sin}.(2-2n).z.$

Loco igitur differentiæ radii vectoris T scribendo $0.0107238 . \text{cos}.(2-2n-c).z$, ex terminis ductis in sinum, aut cosinum anguli $2z - 2nz$ more solito eruetur $0.00075898 . \text{cos}.cz$: & loco T scribendo $-0.006621 . \text{cos}.(2-2n).z$ ex termino alio $18 \phi n^2 T . \text{cos}.(2-2n-c).z$ eruetur $-0.00001824 . \text{cos}.cz$. Simili modo in reliquis æquationis differentialis terminis

$$-2T^2 + \frac{2dT^2 - T . ddT}{dz^2}$$ loco T alternatim statuendo præcipuos terminos argumenti $(2-2n).z$, & $(2-2n-c).z$, prodibit insuper $-0.0002314 . \text{cos}.cz$, ac fiet residuus hujus generis terminus $+0.00004 . \text{cos}.cz$. Quin vero alias omnes quantitates hujusmodi exiguas supputemus, subducamusque a se invicem, observandum est ex quot constantium quantitatum elementis, ex quot terminorum comparatione, quibusque approximationibus, & correctionibus terminus $0.00004 . \text{cos}.cz$ exsurgat. Quæ cum approximationes omnes, correctionesque in tam multiplici operationum serie adeo accuratæ esse nequeant, ut tam exiguos coefficien-

tes

tes certo exhibeant, minime colligendum inde erit in expreſſione vectoris radii eſſe oportere terminum aliquem formæ $0.00002 . z . \text{ſin.} cz$, qui aucto motu angulari z continue augeatur. Æquatione enim differentiali ad formam Probl. III. deducta poſteriores aliquot termini nulla alia ratione integrari poſſunt, quam pro differentia vectoris radii ſubſtituendo valorem ex priorum terminorum integratione erutum, atque ita illos ad horum formam accommodando. Quæ ſi omnino accurata eſſet methodus, non in terminis tantum $-2T^2 + \frac{2dT^2 - T.ddT}{dz^2}$ &c. loco T ſubſtitui poſſet quantitas formæ $\mu . \text{coſ.} \Delta z$, ſed in terminis etiam antecedentibus $\frac{ddT}{dz^2} + c^2 T$: quo dato nulli amplius eſſent circulares arcus, & differentialis æquatio aliam penitus formam indueret. Aliunde etiam manifeſtum eſt lunarem orbitam ab ellipſi, & circulo non admodum abludere: vires perturbatrices exiguas eſſe, & in adverſa parte orbitæ agere contrario ſenſu: adeoque vires in circulari orbita ſe ſe invicem deſtruere, in orbita vero, quæ accedat proxime ad circulum, aberrationes ſemper exiguas eſſe, ſingulas ſuis periodis reverti, neque lunarem orbitam ad aliam penitus formam abduci poſſe.

CAPUT QUARTUM.

DE ÆQUATIONIBUS MOTUS LUNÆ IN LONGITUDINEM.

PROBLEMA VIII.

Invenire æquationes medii motus Lunæ in longitudinem.

Si elementum temporis aſſumatur ut in Probl. II., & III., ſubſtituanturque valores in corollario Probl. V. antea inventi, erit

$$d\theta = \frac{x^2 dz}{1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \int \omega x^3 dz}$$

$$= x^2 dz \left(1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 - \int \omega x^3 dz\right)$$

$$= dz\left(1 + (2\varphi - \varphi^3).\text{coſ.}cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\text{c.}2cz + \varphi^3.\text{c.}3cz + (2 - \varphi^2).T + 2\varphi T.\text{c.}cz\right)$$

$$\left(1.0051615 - 0.0045313.\text{c.}(2-2n).z - 0.001133067.\text{c.}(2-2n-c).z \ \&\text{c.}\right).$$

Jam vero quia motus medius dZ eſt tempori proportionalis, &

$$
\begin{aligned}
\frac{-2\varphi \,.\, \text{cos.}\, cz \,.\, \int \omega x^{3} dz}{1.0051615} = & -0.0002466 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n \pm c).z \\
& -0.0000616 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n-c \pm c).z \\
& -0.0000175 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n+c \pm c).z \\
& +0.0000294 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n-c).z \\
& +0.0000006 \,.\, \text{cos.}\,(1-n).z \\
& -0.000002 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n+m-c).z \\
& +0.0000152 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n-m-c).z \\
& +0.00000375 \,.\, \text{cos.}\,(2-2n-m).z.
\end{aligned}
$$

Ex termino etiam φ^{3} T. cos. $2cz$ eruetur $-0.00001 \,.\, \text{cos.}\,(2c+2n-2).z$, aliusque rursus argumenti, & co- coefficientis ejusdem terminus eruetur ex $-\frac{3}{2}\varphi^{2} \,.\, \text{cos.}\, 2cz \,.\, \int \omega x^{3} dz$. Itaque reliquis valoribus quantitatis $-\int \omega x^{3} dz$ acceptis ex corollario Probl. V., ac per 1.0051615 similiter divisis, omnibus autem terminis, pro integratione obtinenda, divisis per coefficientes angulorum variabilium $1-n$, $2-2n$, $2-2n-c$ &c., quorum valores numericos suo loco singulos indicavimus, prodibit

$$
\begin{aligned}
Z = z & + \frac{2\varphi - \varphi^{3}}{c} \,.\, \text{sin.}\, cz + \frac{3\varphi^{2}}{4c} \,.\, \text{sin.}\, 2cz + \frac{\varphi^{3}}{3c} \,.\, \text{sin.}\, 3cz \\
& +0.000464 \,.\, \text{sin.}\,(1-n).z \\
& -0.00934934 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n).z \\
& -0.0000086 \,.\, \text{sin.}\,(3-3n).z \\
& +0.02291718 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n-c).z \\
& -0.000741 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n+c).z \\
& +0.0000503 \,.\, \text{sin.}\,(c+n-1).z \\
& +0.0005487 \,.\, \text{sin.}\,(2c+2n-2).z \\
& -0.0038193 \,.\, \text{sin.}\, mz \\
& +0.0001206 \,.\, \text{sin.}\,(c+m).z \\
& -0.0002052 \,.\, \text{sin.}\,(c-m).z \\
& +0.0000416 \,.\, \text{sin.}\,(1-n+m).z \\
& +0.000066 \,.\, \text{sin.}\,(1-n+m-c).z \\
& -0.0000733 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n+m).z \\
& +0.000656 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n-m).z \\
& +0.0000114 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n+m-c).z \\
& -0.0009802 \,.\, \text{sin.}\,(2-2n-m-c).z \\
& +0.0004458 \,.\, \text{sin.}\,(2n+2p).z \\
& -0.000022 \,.\, \text{sin.}\,(2+2p).z \\
& -0.000288 \,.\, \text{sin.}\,(2+2p-c).z \\
& +0.000264 \,.\, \text{sin.}\,(2+2p-2c).z.
\end{aligned}
$$

Corollarium.

Priores formulæ hujus terminos cum aliis Probl. V. Lib. I. comparando manifestum erit æquationem centri lunaris orbitæ, calculo accuratissime instituto, prodire aliquantulum minorem. Eadem autem ratione, ac methodo, qua in subsequenti alio problemate ad seriem variationum veri motus eruendam jam usi sumus, loco $\frac{2\varphi}{c}.\text{fin.}\,cz$ scribendo $\frac{2\varphi-\varphi^2}{c}.\text{fin.}\,cz$ prodibit

$$z = Z - \left(\frac{2\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2}{c}\right).\text{fin.}\,cZ + \frac{5\varphi^2}{4c}.\text{fin.}\,2cZ - \frac{13\varphi^3}{12c}.\text{fin.}\,3cZ$$

$$= Z - 0.11012665.\text{fin.}cZ + 0.003772.\text{fin.}2cZ - 0.0000175.\text{fin.}3cZ.$$

Problema X.

Datis æquationibus medii motus æquationes motus veri Lunæ invenire.

Inprimis si fiat $z = Z - a.\text{fin.}\,cz + b.\text{fin.}\,\Delta z$, & coefficientes a, & b exigui sint, eadem methodo citati Problematis statuendo primum

$$z = Z - a.\text{fin.}(cZ - ac.\text{fin.}\,cz + bc.\text{fin.}\,\Delta z)$$
$$+ b.\text{fin.}(\Delta Z - a\Delta.\text{fin.}\,cz + b\Delta.\text{fin.}\,\Delta z),$$

ac deinde loco $\text{fin.}\,cz$, & $\text{fin.}\,\Delta z$ scribendo semper $\text{fin.}(cZ - ac.\text{fin.}cz)$ &c. resolutis, reductisque, ac collectis terminis omnibus denique habebitur

$$z = Z - a(1 - \tfrac{1}{8}a^2c^2 - \tfrac{1}{4}b^2c^2).\text{fin.}cZ \quad \mp \tfrac{1}{2}ab.(\Delta \pm c).\text{fin.}(\Delta \pm c).Z$$
$$+ b(1 - \tfrac{1}{8}b^2\Delta^2 - \tfrac{1}{4}a^2\Delta^2).\text{fin.}\Delta Z \quad \pm \tfrac{1}{8}a^2b.(2c \pm \Delta)^2.\text{fin.}(2c \pm \Delta).Z \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}b^2\Delta.\text{fin.}\,2\Delta Z \text{ \&c.}$$

Primo igitur æquatio centri, quæ ex præcedentibus reductionibus eruebatur, ratione virium perturbatricium imminuenda erit producto ipsius in quartam partem summæ quadratorum coefficientium omnium constantium: cumque spectatis præcipuis terminis argumenti $2 - 2n - c$, $2 - 2n$, m sit quarta pars summæ hujusmodi 0.0001568, atque aliis terminis omnibus spectatis satis proxime censeri possit 0.0001575, loco $-0.11012665.\text{fin.}cZ$ habebimus $-0.1101093.\text{fin.}cZ$. At insuper in se ductis coefficientibus, subductisque argumentis $2 - 2n$, & $2 - 2n - c$, ex termino $+\frac{1}{2}ab(\Delta - c).\text{fin.}(\Delta - c).Z$ alius eruetur terminus $0.0001062.\text{fin.}\,cZ$. Quare neglectis aliis minoribus reductionibus terminus omnis hujusmodi censeri poterit $-0.110003.\text{fin.}cZ$.

De-

Deinde vero posito $b = -0.02291718$, & $\Delta = 2 - 2n - c$, supputatisque quantitatibus $b(1 - \frac{1}{8} b^2 \Delta^2 - \frac{1}{4} a^2 \Delta)$, atque insuper pro correctione alia $\frac{1}{2} ab(\Delta - c)$. sin. $(\Delta - c)$. Z posito $a = 0.11012665$, $b = 0.00934934$, & $\Delta = 2 - 2n$, æquatio, quæ evectionis dicitur, evadet $- 0.0224136$. sin. $(2 - 2n - c)$. Z. Pro alia vero æquatione argumenti $2 - 2n + c$ observandum est, præter correctionem illam, quæ ex termino $-\frac{1}{2} ab(\Delta + c)$. sin. $(\Delta + c)$. Z similiter potest erui, secundam correctionem esse, quæ ex termino $\frac{1}{8} a^2 b(2c + \Delta)^2$. sin. $(2c + \Delta)$. Z educitur, si fiat scilicet $\Delta = 2 - 2n - c$: atque ita evadet æquatio omnis hujusmodi $- 0.001004$. sin. $(2 - 2n + c)$. Z.

Posito etiam $\Delta = 2 - 2n - c$, & $b = -0.02291718$ ex termino $\frac{1}{2} b^2 \Delta$. sin. $2c$Z eruetur 0.0002255. sin. $(4 - 4n - 2c)$. Z. Quia vero ex priori æquatione differentiali reassumpto termino $-\mu^2 (1 + \frac{1}{2} \Delta^2)$. cos. $2\Delta z$, & loco μ. cos. Δz scribendo 0.0107238. cos. $(2 - 2n - c)$. z accederet æquationi eidem terminus -0.0001574. cos. $(4 - 4n - 2c)$. z, atque in integrali æquatione haberetur insuper 0.0000787. cos. $(4 - 4n - 2c)$. z, unde colligi posset veri motus variatio -0.000092. sin. $(4 - 4n - 2c)$. Z; coefficientibus junctis fiet omnis hujus generis terminus 0.0001335. sin. $(4 - 4n - 2c)$. Z. Simili modo supputari poterit terminus 0.00005. sin. $(4 - 4n)$. Z.

Aliorum terminorum brevior erit reductio, atque ex jam dictis facile colligetur. Omnibus autem terminis simul collectis fiet

$z = Z - 0.110003$. sin. cZ
$+ 0.003772$. sin. $2c$Z
$- 0.000175$. sin. $3c$Z
$- 0.000464$. sin. $(1 - n)$. Z
$+ 0.011662958$. sin. $(2 - 2n)$. Z
$+ 0.0000086$. sin. $(3 - 3n)$. Z
$+ 0.00005$. sin. $(4 - 4n)$. Z
$- 0.0224136$. sin. $(2 - 2n - c)$. Z
$- 0.001004$. sin. $(2 - 2n + c)$. Z
$- 0.00029$. sin. $(4 - 4n - c)$. Z
$+ 0.0001335$. sin. $(4 - 4n - 2c)$. Z
$- 0.0000517$. sin. $(c + n - 1)$. Z
$- 0.0007161$. sin. $(2c + 2n - 2)$. Z
$+ 0.0038193$. sin. mZ
$- 0.0003447$. sin. $(c + m)$. Z
$+ 0.0003981$. sin. $(c - m)$. Z

$- 0.$

$$-0.0000416 . \sin. (1-n+m).Z$$
$$-0.000066 . \sin. (1-n+m-c).Z$$
$$+0.0000725 . \sin. (2-2n+m).Z$$
$$-0.0007447 . \sin. (2-2n-m).Z$$
$$-0.0000077 . \sin. (2-2n+m-c).Z$$
$$+0.000952 . \sin. (2-2n-m-c).Z$$
$$-0.0004458 . \sin. (2n+2p).Z$$
$$+0.000022 . \sin. (2+2p).Z$$
$$+0.000288 . \sin. (2+2p-c).Z$$
$$-0.000264 . \sin. (2+2p-2c).Z .$$

COROLLARIUM.

In hac igitur reductione medii motus ad verum patet ex priori ſeriei termino $-a(1-\frac{1}{4}b^2c^2 \&c.).\sin. cZ$ æquationem centri ob alias ſimul æquationes omnes, quæ ex viribus perturbatricibus oriuntur, minorem fieri, quam quæ eſſet in ellipſi circa focum deſcripta viribus decreſcentibus in duplicata ratione auctarum diſtantiarum. Patet ſimiliter ex termino altero $b(1-\frac{1}{4}a^2\Delta^2 \&c.).\sin. \Delta Z$ unamquamque æquationem ob alias ſimul omnes primum imminui oportere, ac deinde ob poſteriores binos ſeriei terminos varie corrigi.

PROBLEMA XI.

Æquationes eaſdem veri motus ad tabularum formam reducere.

Ut æquationes omnes ad tabularum aſtronomicarum formam reducantur, & comparari cum ipſis poſſint, motum Solis, non medium, ſed verum, & anomaliam pariter veram aſſumere oportet, æquationeſque a plano lunaris orbitæ ad planum eclipticæ traducere. Sit igitur Y vera Solis diſtantia a loco ſummæ apſidis, & ſit anomalia media $mZ = Y + 2\delta.\sin. Y$. Sit etiam X angularis diſtantia loci medii Lunæ a loco vero Solis, ac ſit propterea

$$X = Z - nZ + 2\delta.\sin. Y$$
$$\sin.(2-2n-c).Z = (1-4\delta^2).\sin.(2X-cZ) \mp 2\delta.\sin.(2X-cZ \pm Y).$$

Reſolutionibus aliis de more factis prodibit

$$-0.0224136.\sin.(2-2n-c).Z = -0.0224111.\sin. 2X - cZ$$
$$\pm 0.000753.\sin. 2X - cZ \pm Y$$
$$+0.011662958.\sin.(2-2n).Z = 0.01165.\sin. 2X$$
$$\pm 0.0003918.\sin. 2X \pm Y$$
$$+0.0039193.\sin. mZ = +0.0038182.\sin. Y$$
$$+0.000064.\sin. 2Y$$

In

In aliis terminis omnibus satis erit scribere X loco $Z - nZ$, & Y loco mZ, nullæque aliæ exorientur correctiones, quæ sint sensibiles. Pariter si sit S media Lunæ distantia a nodo, neglectis aliis minoribus correctionibus, statui poterit $2S$ loco $2Z + 2pZ$, & $2S - 2X$ loco $2nZ + 2pZ$: atque his denominationibus ex Probl. IV. Lib. III. accipi poterunt æquationes reductionis motus Lunæ ad Eclipticam. Denique si neque alius negligatur exiguus terminus $- 0.0003.T$, qui in posteriori reductione Probl. VI. libri hujus supererat, statuendo $T = 0.0107238 . \text{cos.} (2 - 2n - c). z$, dividendoque primum per 0.245554, ac deinde per 0.8588466, & quotum signo inverso bis accipiendo, exsurget correctio alia $6 . 3''. \text{sin.} 2X - cZ$.

Quare collectis terminis, & unitatis loco scribendo $206264.808''$, erit motus verus Lunæ in longitudinem ad Eclipticam reductus

$$\begin{aligned}
z = Z & - 6^\circ 18' 9''. \text{sin.} cZ \\
& + 12' 58''. \text{sin.} 2cZ \\
& - 36''. \text{sin.} 3cZ \\
& - 1' 36''. \text{sin.} X \\
& + 39' 40''. \text{sin.} 2X \\
& + 2''. \text{sin.} 3X \\
& + 10''. \text{sin.} 4X \\
& - 1^\circ 16' 56''. \text{sin.} 2X - cZ \\
& - 3' 27''. \text{sin.} 2X + cZ \\
& - 59.7''. \text{sin.} 4X - cZ \\
& + 27.5''. \text{sin.} 4X - 2cZ \\
& - 10.6''. \text{sin.} cZ - X \\
& - 2' 27.7''. \text{sin.} 2cZ - 2X \\
& + 13' 7.5''. \text{sin.} Y \\
& + 13''. \text{sin.} 2Y \\
& - 1' 11''. \text{sin.} cZ + Y \\
& + 1' 22''. \text{sin.} cZ - Y \\
& - 8.6''. \text{sin.} X + Y \\
& - 13.5''. \text{sin.} X + Y - cZ \\
& - 1' 2''. \text{sin.} 2X + Y \\
& - 1' 13''. \text{sin.} 2X - Y \\
& + 2' 38''. \text{sin.} 2X + Y - cZ \\
& + 41''. \text{sin.} 2X - Y - cZ \\
& - 6' 53''. \text{sin.} 2S \\
& - 1' 32''. \text{sin.} 2S - 2X \\
& + 46''. \text{sin.} 2S + cZ \\
& + 13''. \text{sin.} 2S - cZ \\
& - 54''. \text{sin.} 2S - 2cZ.
\end{aligned}$$

Co-

Corollarium I.

Singulæ igitur æquationes ex generali ſolutione problematis derivatæ intra aliquot ſecundorum limites cùm Majeri tabulis conſentiunt, ſola excepta æquatione ánnua $13' \, 7\frac{1}{2}''$. ſin. Y, quæ plus quam minuto uno, ac dimidio inde diſcrepat. Et quidem cum in priori integratione, atque in calculis ſubſequentibus minorum etiam fractionum ratio ſit habita, ſi vere in maxima ſui quantitate ab ea deficiat æquatio, quam Hallejus ex obſervationibus primum collegerat, excentricitatem etiam terreſtris orbitæ paulo minorem partibus 0.0168 radii mediocris aſſumere neceſſe erit. Pariter excentricitas orbitæ lunaris paulo minor quam ſupra aſſumenda erit ſi vere æquatio centri ſecundis aliquot a ſex gradibus, ac tribus decimis deficiat.

Corollarium II.

Imminuta etiam excentricitate æquationes binæ, & quæ evectionis dicitur, & quæ idem evectionis argumentum habet inverſo anomaliæ lunaris ſigno, cum tabulis accuratius convenirent. Quamvis ſi æquationes ipſæ accipiantur ut calculis ſuperioribus prodierunt, prior $16''$ dumtaxat, altera $20''$ coefficientes tabularum ſuperat. Tantumdem fere prima, & ſecunda Lunæ variatio a tabulis deficere deprehenſa eſt. Semeſtris æquatio fere eadem nobis quæ authoribus aliis prodiit, ſcilicet $50''$ fere ſecundis minor quam Majerus ex obſervationibus colligere viſus eſt. Et quidem cum ſemeſtris æquationis, & evectionis calculus ex tam multiplici operationum ſerie, correctionibuſque, ac reductionibus aliis pendeat, ſatis erit intra eoſdem limites propius obſervationibus acceſſiſſe.

Corollarium III.

Pariter æquationes argumenti $2S - 2X$, & $cZ - X$ cum eædem nobis, aliiſque authoribus obvenerint, prior $50''$ major, altera fere tantumdem minor prodiit quam ferant tabulæ. Æquationes reliquæ penitus conveniunt: & binæ illæ, quæ pro argumentis habent $X + Y$, & $2S - 2cZ$, quaſque in tabulis non attigit Majerus, ſed inſtituto potius calculo determinavit, ejuſdem ſigni, & coefficientis non admodum diverſi nobis prodierunt. Hæc vero tanta cum tabulis, & Majeri, aliorumque calculis conſenſio, atque ordo ipſe, ac ratio præcedentium calculorum, quos ſæpius mutatis aliquantulum elementis reaſſumpſimus, patienterque in diverſas partes verſavimus, ſatis indicat æquationes intra unius minuti limites certas eſſe.

Scholion.

Has vero, & alias æquationes omnes hujusmodi considerando, quæ simili modo ex formulis superioribus deduci possunt, manifestum est singulas datis periodis reverti, neque ullam esse, quæ magis semper, magisque augeatur successu temporis, & sæculari Lunæ æquationi explicandæ idonea sit. Quod etiam ex priori virium perturbatricium consideratione satis colligitur. Cum enim vires juxta vectorem radium agentes cosinubus diversorum angulorum exprimantur, iis evolutis nullus in differentiali, atque integrali æquatione oriri poterit terminus formæ μz, qui postmodum in expressione angularis motus terminum alium gignat formæ $\frac{1}{2}\mu z^2$, æquationemque exhibeat crescentem semper in duplicata ratione temporum. Cumque insuper vires radio vectori perpendiculares exprimantur sinubus eorumdem angulorum, neque in resolutione termini ωx^2 quantitas quæpiam constans exsurget, neque in termino $x^2 \int \omega x^2 dz$ quantitas alia occurret ejusdem formæ μz, quæ sæculari æquationi explicandæ inserviat. Denique quantitates omnes constantes 1, c, n, m, p, quæ coefficientes angulorum variabilium componunt, ita inter se differunt, ut multiplis etiam acceptis, subductisque coefficiens anguli cujuspiam variabilis omnino exiguus prodeat, atque inde apparens aliqua oriatur medii motus æquatio, quæ pariter augeri videatur in duplicata ratione temporis, quemadmodum in subsequenti libro observabimus. Quod idem non de Solis dumtaxat, sed etiam Jovis, aliorumque Planetarum in Lunam actionibus dici debet. Et ne dubium postremo aliquod suboriatur de iis omnibus attractionis terrestris inæqualitatibus, quæ ex figura sphæroidica pendere possunt, quæque ad explicandam sæcularem Lunæ æquationem fortasse faciant; adnotandum est nec vis, quam Terra juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercet, partem esse aliquam motui angulari proportionalem, nec vis alterius perpendicularis radio ullam utcumque exiguam portionem esse, quæ constans sit, quæque in æquatione Probl. II. libri hujus, atque in termino $2x^2 \int \omega x^2 dz$ ad exprimendam vim perpendicularem ω adjecta variationem vectoris radii proportionalem tempori exhibeat. Quod ut citra accuratam attractionis totius formulam, & series a Mac-Laurino, & Clairaut traditas, brevi consideratione innotescat, statuamus lineam apsidum AT a, fig. 44., a linea nodorum terrestris æquatoris B b distare angulo recto. Tum per lineam eamdem apsidum statuamus traduci aliquod planum normale lunari orbitæ, quod propterea Terræ oc-

currendo ipſam in duas hemiſphæroides dividat æquales, ſimiles, & pro apſidum linea ſimiliter hinc inde poſitas. Orbita ſic conſtituta manifeſtum eſt quod cum Luna in apogæo, vel perigæo reperietur, ob ſphæroidicam Terræ formam in neutram partem perpendiculariter ad vectorem radium impelli poterit, ſeu vis perpendicularis radio nulla erit. Simili modo patebit in locis a linea apſidum æque diſſitis vires perpendiculares æquales eſſe, & tendere hinc inde in adverſas partes. Alia etiam hujuſmodi poſſent colligi ſpectando alias poſitiones lunaris orbitæ. Hæc vero ſufficiunt ut jam pateat vim perpendicularem radio, quæ ex ſphæroidica Terræ figura oritur, non exprimi conſtanti aliqua quantitate, nec ſæculari æquationi Lunæ explicandæ ullo modo eſſe idoneam. Univerſim itaque in tota attractionis theoria nihil omnino invenietur, quod æquationis ejuſdem cauſa, & origo ſit, & ſola atmoſphæræ undique circa Solem affuſæ reſiſtentia ſupererit, in quam idem phænomenon refundi poſſit ea ratione, iiſque legibus, quas in poſtremo capite prioris libri explicavimus.

CAPUT QUINTUM.

DE ÆQUATIONIBUS MOTUS NODORUM, INCLINATIONIS ORBITÆ, ET LATITUDINIS.

Problema XII.

INvenire æquationes motus nodorum lunaris orbitæ in plano Eclipticæ.

Poſitis omnibus ut in fig. 37., & in Probl. I. Lib. III., neglectiſque inferiorum ordinum terminis, ob ſin. LTD $=$ coſ. LTA, erit angularis motus nodorum

$\frac{3}{4} n^2 . TL^4 .$ ſin. ATB . ſin. LTB . coſ. LTA . $dz =$

$\frac{3}{4} n^2 . TL^4 .($ſin. ATB^2. coſ. LTA$^2 \mp$ ſin. ATB. coſ. ATB. ſin. LTA. c. LTA$). dz$:

& cum ſit coſ. LTA$^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ coſ. 2LTA,

ſin. ATB$^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ coſ. 2ATB,

$- \frac{1}{4}$ coſ. 2LTA . coſ. 2ATB $\mp \frac{1}{4}$ ſin. 2ATB . ſin. 2LTA$) =$

—

$-\frac{1}{4}.\text{cos.}\,(2LTA \mp 2ATB) = -\frac{1}{4}\text{cos.}\,2LTB$, fiet motus ipse

$\frac{1}{4}n^2.TL^4(1+\text{cos.}\,2LTA - \text{cos.}\,2LTB - \text{cos.}\,2ATB).dz.$

Cumque insuper positis aliis antecedentibus denominationibus sit motus Lunæ a Sole $LTA = z - nz$, motus Lunæ a nodo $LTB = z + pz$, & motus Solis a nodo $ATB = nz + pz$, isque per æquationem centri Solis, & priorem motus nodorum æquationem correctus fiat

$$nz + pz - 2\delta.\text{sin.}\,mz - \tfrac{3}{8}n.\text{sin.}\,(2n+2p).z,$$

juxta Probl. III. Lib. II. loco n^2 scribendo $n^2(1 - 3\delta.\text{cos.}\,mz)$, & juxta Probl. III., & VIII. libri hujus loco TL^4 scribendo

$$1+\varphi^2+4\varphi.c.cz+5\varphi^2.c.2cz+0.04289.c.(2-2n-c).z-0.0265.c.(2-2n).z,$$

motus nodorum lunaris orbitæ relatus ad signorum ordinem æquabitur quantitati $-\frac{1}{4}n^2dz$ ductæ in terminos

$$1+\varphi^2 - 0.01325 - 3\delta.\text{cos.}\,mz + (4\varphi + 0.0215).\text{cos.}\,cz$$
$$-(1-0.01325).\text{cos.}\,(2n+2p).z + \tfrac{3}{8}n.\text{cos.}\,(4n+4p).z$$
$$-0.9867.\text{cos.}\,(2+2p).z + 0.9867.\text{cos.}\,(2-2n).z$$
$$-\tfrac{1}{2}\delta.\text{cos.}\,(2n+2p-m).z + \tfrac{7}{2}\delta.\text{cos.}\,(2n+2p+m).z$$
$$-2\varphi.\text{cos.}\,(2n+2p-c).z - (2\varphi+0.0215).\text{cos.}\,(2n+2p+c).z$$
$$+(2\varphi+0.0429).\text{cos.}\,(2-2n-c).z - (2\varphi+0.0215).\text{cos.}\,(2+2p-c).z$$
$$+\tfrac{5}{2}\varphi^2.\text{cos.}\,(2-2n-2c).z - \tfrac{5}{2}\varphi^2.\text{cos.}\,(2+2p-2c).z.$$

Subductis igitur numeris, & more solito integrando erunt æquationes præcipuæ medii motus nodorum lunaris orbitæ

$$0.0028274.\text{sin.}\,mz - 0.0001617.\text{sin.}\,cz$$
$$+0.026203.\text{sin.}\,(2n+2p).z - 0.000373.\text{sin.}\,(4n+4p).z$$
$$+0.00207.\text{sin.}\,(2+2p).z - 0.002236.\text{sin.}\,(2-2n).z$$
$$+0.000424.\text{sin.}\,(2+2p-m).z - 0.00106.\text{sin.}\,(2+2p+m).z$$
$$-0.000545.\text{sin.}\,(2n+2p-c).z + 0.000463.\text{sin.}\,(2n+2p+c).z$$
$$-0.00075.\text{sin.}\,(2-2n-c).z + 0.00055.\text{sin.}\,(2+2p-c).z$$
$$+0.000237.\text{sin.}\,(2-2n-2c).z + 0.001244.\text{sin.}\,(2+2p-2c).z.$$

Corollarium.

Cum summa omnium $\frac{3}{4}n^2dz$ in circulari orbita sit annis singulis $20° \ 11\frac{3}{4}'$, cumque habita ratione & motus Solis, & inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam sit annuus nodorum motus $19° \ 35\frac{2}{3}'$, ut in Coroll. I. Probl. II. Lib. III. jam dictum est; si motus ipse minuatur in ratione $1 + \varphi^2 - 0.01325 : 1$, correctus nodorum motus fiet annis singulis $19° \ 23\frac{1}{2}'$, proxime ut ferunt observationes. Unde etiam si valor vectoris radii ex generali solutione problematis assumatur, patet iterum, quod in scholio Cap. I. Lib. III. jam dictum est, variationes annui nodorum motus exprimi quidem simplici differentia semiaxium illius ellipseos, quæ circa Terram veluti centrum describi posset, sed excentricitatis orbitæ ellipticæ secunda potentia dumtaxat affici.

Problema XIII.

Æquationes easdem ad tabularum formam reducere.

Si ad normam lemmatis, quod Problemati X. præmissum est, assumamus

$$\text{sin.}(2-2n).z = \text{sin.}(2-2n).Z \mp 0.055.(2-2n).\text{sin.}(2-2n \pm c).Z,$$

ac sic pariter $2Z - 2nZ = X$, loco $-0.002236.\text{sin.}(2-2n).z$ habebimus

$$-0.002236.\text{sin.}\,2X \pm 0.0002276.\text{sin.}(2X \pm cZ).$$

Pariter si sit S distantia loci medii Lunæ a nodo, ac fiat

$$2z + 2pz = 2Z + 2pZ - 4\varphi.\text{sin.}\,cZ = 2S - 4\varphi.\text{sin.}\,cZ, \text{ erit}$$

$$0.00207.\text{sin.}(2+2p).z = 0.00207.\text{sin.}\,2S \mp 0.0002277.\text{sin.}(2S \pm cZ).$$

Denique si motus Solis non medius, sed verus accipiatur, & sit

$$2nz + 2pz - 4\delta.\text{sin.}\,mz = 2S - 2X, \text{ erit etiam}$$

$$0.02603.\text{sin.}(2n+2p).z = 0.02603.\text{sin.}(2S - 2X)$$
$$\pm 0.00088.\text{sin.}(2S - 2X \pm Y).$$

Quare unitatis loco scribendo ut antea $206264.808''$, & terminos omnes colligendo erunt æquationes præcipuæ medii motus nodorum Lunaris orbitæ in plano Eclipticæ

$1^{\circ}\ 30'\ 3''$. fin. $2S - 2X$
$- 1'\ 17''$. fin. $4S - 4X$
$+ 9'\ 43''$. fin. Y
$- 21''$. fin. cZ
$+ 7'\ 7''$. fin. $2S$
$- 7'\ 41''$. fin. $2X$
$+ 47''$. fin. $2S + cZ$
$+ 2'\ 41''$. fin. $2S - cZ$
$+ 4'\ 17''$. fin. $2S - 2cZ$
$+ 47''$. fin. $2X + cZ$
$- 3'\ 22''$. fin. $2X - cZ$
$+ 50''$. fin. $2X - 2cZ$
$- 37''$. fin. $2S - 2X + Y$
$- 1'\ 34''$. fin. $2S - 2X - Y$
$- 1'\ 52''$. fin. $2S - 2X - cZ$
$+ 1'\ 35''$. fin. $2S - 2X + cZ$

Corollarium.

Quia vero juxta Probl. III. Lib. III. variatio inclinationis orbitæ eft
$-3n^{2}.TL^{4}$. fin. ATB. cof. LTB. cof. LTA. $\pi d z$,
facile patebit æquationes variatæ inclinationis definiri cofinubus eorumdem angulorum, quorum finus æquationes motus nodorum definiunt, coefficientes autem harum æquationum iu finum mediæ inclinationis duci oportere, ut coefficientes æquationum illarum præbeant. Ita igitur erunt æquationes præcipuæ inclinationis lunaris orbitæ
$8'\ 6.4''$. cof. $2S - 2X$
$- 7''$. cof. $4S - 4X$
$+ 38.6''$. cof. $2S$
$- 41.4''$. cof. $2X$
$+ 14.4''$. cof. $2S - cZ$
$+ 23''$. cof. $2S - 2cZ$
$- 18''$. cof. $2X - cZ$
$- 8.4''$. cof. $2S - 2X - Y$
$- 9''$. cof. $2S - 2X - cZ$
$+ 8.4''$. cof. $2S - 2X + cZ$.

Problema XIV.

Iifdem pofitis invenire æquationes motus Lunæ in latitudinem.

Cum angulus diftantiæ Lunæ ab Ecliptica vifæ e Terra in maxima fui quantitate æquetur angulo inclinationis lunaris orbitæ, aliis

aliis autem in locis minuatur in simplici ratione sinus distantiæ Lunæ a nodorum linea, resolutis productis ipsius sinus in æquationes omnes, quæ juxta Probl. XII. correctam Lunæ distantiam a nodis exprimunt, inclinatione media lunaris orbitæ posita ut antea $5° 9' 8''$, latitudo Lunæ æquabitur angulo $5° 9' 8'' + 8' 6.4''$. cos. $(2S - 2X) + 38.6''$. cos. $2S$ &c. ducto in

-0.0131015. sin. $2S - 2X \pm S$
-0.001035. sin. $2S \pm S$
$+0.001118$. sin. $2X \pm S$
-0.000389. sin. $2S - cZ \pm S$
-0.000622. sin. $2S - 2cZ \pm S$
$+0.000489$. sin. $2X - cZ \pm S$
$+0.000186$. sin. $4S - 4X \pm S$
$+0.000228$. sin. $2S - 2X - Y \pm S$
-0.000236. sin. $2S - 2X + cZ \pm S$
$+0.000272$. sin. $2S - 2X - cZ \pm S$
∓ 0.0014137. sin. $S \pm Y$.

Primo igitur in sinus hos omnes ducendus erit angulus $5° 9' 8''$, ac deinde neglectis ob parvitatem similibus productis termini $8' 6.4''$. cos. $2S - 2X$, terminorumque aliorum subsequentium, erit correcta Lunæ latitudo

$5° 8' 29.5''$. sin. S
$+ 8' 47.66''$. sin. $2X - S$
$-7''$. sin. $4X - 3S$
$\mp 26''$. sin. $S \pm Y$
$- 14.4''$. sin. $S - cZ$
$- 23''$. sin. $S - 2cZ$
$- 8.4''$. sin. $2X - S + Y$
$- 9.5''$. sin. $2X - S + cZ$
$\pm 15.5''$. sin. $2X - S - cZ$.

Corollarium.

Ut æquationes hujusmodi comparari possint cum tabulis, omittendus erit duplex terminus $\mp 26''$. sin. $S \pm Y$. In tabulis enim assumitur latitudo Lunæ correcta jam ope æquationis annuæ motus mediocris nodorum. Aliæ autem præcipuæ, quas supputavimus, latitudinis æquationes ita cum tabulis conveniunt ut differentia omnis exigua in varietatem elementorum calculi, & reductionum singularum merito refundi possit. Reliquæ latitudinis æquationes, quas ob parvitates omisimus, eadem ratione, atque ordine, aliis terminis resolutis, supputari possent. Scho-

Scholion.

Ita igitur æquationes omnes medii motus Lunæ in longitudinem, ac latitudinem ex generali solutione problematis trium corporum se se attrahentium in ratione directa massæ, distantiarumque reciproca duplicata tam facile erutæ sunt, ut solæ elementaris Algebræ subsidio totam calculi seriem recognoscere quisque possit per partes singulas, atque insuper tam accurate, ut non nisi inferiorum ordinum decimales in eadem calculi serie neglecti sint, utque illæ etiam æquationes, quæ incertæ adhuc, ac dubiæ videbantur, intra limites satis arctos observationibus respondeant, quemadmodum ex corollariis Probl. XI., atque ex Cap. III., & IV. manifestum est. Pariter apogæi lunaris motus ex ipsa dispositione terminorum, qui vires omnes perturbatrices, & perpendiculares radio, & juxta radium ipsum agentes exprimunt, observationibus satis conformis prodiit, terminis aliis, qui circulares arcus involvere videntur, destruentibus se se invicem, accurate quantum in hisce approximationibus pro varietate elementorum calculi requiri posset, ut constat ex Probl. VI., atque ex scholio Cap. III. Patet insuper ex scholio Cap. IV. libri hujus, atque ex postremo scholio prioris libri non quidem ex attractione mutua cælestium corporum, sed potius ex resistentia ætherei fluidi sæcularem Lunæ æquationem repetendam esse. Quibus omnibus viderint alii num satis jam sit factum quæstionibus iis omnibus, quas Regia Parisiensis Scientiarum Academia septennio fere Geometrarum examini iteratis vicibus proposuit: I. scilicet postulando ut perficiantur methodi, quibus theoria Lunæ innititur: II. ut æquationes illæ determinentur, quæ incertæ adhuc, ac dubiæ videri possent: III. ut habita ratione attractionis omnium Planetarum, & figuræ etiam non sphæricæ investigetur num ex gravitatis theoria quæpiam sæcularis æquatio Lunæ, non autem Terræ deduci possit: IV. ut ostendatur in calculo motuum lunarium non nisi illas quantitates neglectas esse, quæ nullum sensibilem errorem pariunt: V. ut theoriæ lunaris analysi promota novi quidpiam hacce in re addatur inventis aliorum Geometrarum.

LIBER

LIBER QUINTUS.

DE THEORIA OMNIUM PLANETARUM.

ALias esse cælestium aliorum corporum inæqualitates, quæ pendent ex vario eorumdem aspectu inter se invicem, jam diu Astronomis innotuit. Comparando observationes Hevelii anno *1672*. habitas cum aliis anni 1731. observationibus, motus medius Saturni singulis annis Julianis 59, & uno die prodit duarum integrarum revolutionum, atque insuper 1° 44' 50''. Observationes aliæ annorum *1686*., & 1745. inter se comparatæ eodem tempore medium Saturni motum duarum revolutionum exhibent adjecto dumtaxat 1° 39' 2'' : scilicet *6*' breviorem quam ex prioribus observationibus prodierit. Adnotandum est autem priorum observationum tempore Saturno fere oppositum fuisse Jovem : anno *1686*. distasse a se invicem duos Planetas 47½°, & 40° anno 1745. : quod plane indicat aliquam Saturni inæqualitatem, quæ ex vario Jovis aspectu pendet. Pariter anno *1686*. error tabularum erat 21' *9*'', & anno 1745. erat 3*6*' 12''. Anno 171*6*. duobus jam dictis intermedio, cum error 28' esse debuisset, 3*6*' adhuc inventus est. Cui porro caussæ discrimen 8' tribuendum erat quam Jovi, qui anno 171*6*. tribus signis a Saturno distabat, dimidio scilicet signo magis quam aliis duobus annis? Et plane comparando observationes eodem aspectu habitas evanescit hæc inæqualitas, atque est error annorum numero proportionalis.

Cassinus etiam cum anno 1743. mense Februario Saturni, & Jovis conjunctionem observasset, deprehendit longitudinem Saturni 12' 38'' minorem, & longitudinem Jovis 2' 33'' majorem fuisse quam ferrent tabulæ: & differentiam hujusmodi tantam esse censuit ut in errorem tabularum minime refundi posset. Præcipuas Jovis inæqualitates alii Astronomi, atque in primis Majerus, collatis inter se invicem observationibus, accurate definierunt. Juxta Majerum si sit X media distantia Jovis, & Saturni, anomalia media Saturni Y, Jovis Z, erunt æquationes præcipuæ medii motus Jovis in longitudinem — 1'

$-1' 37''$. fin. X	$-2' 23''$. fin. 2 X — Z
$+3' 50''$. fin. X	$-47''$. fin. 3 X — Z
$-1' 30''$. fin. 2 X — Y	$-56''$. fin. X — Y.

In conjunctione Martis, & Jovis, quæ die 29. Junii anno 1727. contigit, & cujus observationem retulit Manfredius Par. 3. To. 2. Bononiensis Academiæ, longitudines Martis ante, & post conjunctionem majores prodierunt quam ex tabulis: ita quidem ut diebus 25. Maji, & 4., ac 5. Junii, quorum dierum observationes accuratissimæ ipsi Manfredio visæ sunt, longitudo Martis 39'', 3'', 45'' major deprehensa sit quam juxta Wisthoni tabulas esse oportebat. Deinde motum Martis, qui juxta easdem tabulas debebat esse 1° 24' 10'' duobus diebus conjunctionem antecedentibus, & 1° 23' 52'' diebus aliis proxime consequentibus, cum observationibus comparavit Manfredius: & quidem juxta illas, quas primo instituit Martem ad Solem referendo, motus duorum antecedentium dierum prodiit 1° 24' 14'', & 1° 22' 54'' motus duorum proxime consequentium: juxta alias autem observationes Martis ad Arcturum relati prodierunt bini motus 1° 24', & 1° 23' 34'', ac differentiam omnem exiguam inde oriri potuisse censuit Manfredius, quod $\frac{1}{4}$'' temporis erratum sit in determinando Arcturi, vel Martis transitu.

Præter has vero, & consimiles alias inæqualitates, quæ pendent ex vario aspectu Planetarum, & datis periodis revertuntur, quædam insuper inæqualitates sunt, quæ procedunt semper eodem ordine, & continue augeri videntur successu temporis. Phænomenon hujus generis præcipuum est quod Saturni revolutiones circa Solem fiant semper diuturniores, & motus medius Planetæ ipsius dato quocumque tempore minor semper succedentibus revolutionibus evadat: & contra quod imminuatur periodicum tempus Jovis, & motus medius augeatur. Hireus in tabulis motum medium Saturni 6'' annis singulis imminui statuit, & 1' 40'' tempore annorum mille: quo dato suas, Tychonicasque observationes conciliavit inter se invicem, & vetustiores alias Ptolemæi, quæ 2°, aut 3° a suis dissentiebant, veluti indiligentes, ac dubias penitus dereliquit. Hallejus spectatis omnibus observationibus censuit decrementum omne annis mille esse 2° 19', atque augeri semper in duplicata ratione temporum: Cassinus vero 11'' annis singulis, atque annis mille 3° 3' 20'' esse voluit, nimirum tempori proportionalem.

Cassinus etiam in actis Parisiensis Academiæ anni 1746. contendit dimidio secundo annis singulis motum medium Jovis augeri, &

16' 40" integris annis bis-mille : Hallejus autem in tabulis motum ipsum 3° 49' eodem tempore fuisse auctum censuit : quæ Hallejana æquatio pluribus Astronomis nimia visa est. Nuper in actis anni 1768. Clariss. Bailly veteribus omnibus observationibus, ac recentioribus summo studio collatis inter se invicem accelerationem annuam medii motus Jovis 0. 1733" constituit, eamque augeri dixit in duplicata ratione temporum. Longitudo Martis in oppositione anni 1751. paulo major deprehensa est, quam juxta Halleji tabulas prodierit: paulo minor in oppositione anni 1745., & in oppositione 1741. fere eadem : unde motum medium Martis satis accurate iisdem tabulis exhiberi censendum est. Motus medius Veneris, & Mercurii ipse etiam satis constans deprehenditur.

Ad medium motum Terræ, & ad solarem annum quod pertinet, Ricciolius Lib. 1. Astron. Cap. 4. ex vetustissimis Hipparchi observationibus juxta refractionum leges correctis, atque ex tempore æquinoctii anno 1655. Bononiæ a se observati solarem annum collegit esse secundorum 48 ultra 365ᵈ 5ʰ 48', quam fere anni quantitatem Tycho, Keplerus, Flamsteedius, & Newtonus statuerunt. Si cum aliis recentioribus observationibus comparentur quæ a Walthero institutæ sunt decimo quinto sæculo exeunte, ultra illud tempus secunda tantum $46\frac{1}{2}$ excrescere videntur. Cassinus ex pluribus æquinoctiis, quæ Vraniburgi, Bononiæ, ac Parisiis observaverat, secundorum numerum ad 41 reduxit. Caillius in Lectionibus Astronomicis comparatione observationum a se quidem anno 1749., & a Cassino die 28. Martii anno 1657. institutarum secunda constituit 43 : & in actis Parisiensibus anni 1750. observationes Picarti cum propriis comparando, accipiendoque medium ex omnibus, constituit tantum 40. Majerus autem, ut ad calcem prioris libri adnotavimus, cum observationes omnes hujusmodi, veteres, recentioresque summa diligentia correctas contulisset inter se, accelerationem quidem medii motus Lunæ certo evicit, nihil autem inde potuit colligere, quod accelerationem medii Telluris motus, & imminutionem aliquam annui temporis similiter evinceret.

CA-

CAPUT PRIMUM.

DE THEORIA PLANETARUM INFERIORUM, QUI PERTURBANTUR A SUPERIORIBUS.

PROBLEMA I.

INvenire vires omnes, quibus Planetæ inferiores perturbantur a ſuperioribus.

Si quantitates materiæ Solis, & Planetæ ſuperioris, inferiorisque ſint ordine 1, M, M', & radius vector inferioris orbitæ vocetur x, erit $\frac{1 + M'}{x^2}$ vis omnis, qua Sol, & Planeta inferior in ſe invicem tendent. Et quia ratio $M' : 1$ adeo eſt exigua, ut neglecta vi $\frac{M'}{x^2}$ nulla æquationum omnium variatio prodeat, quæ ſit ſenſibilis; ſi gravitas inferioris Planetæ in Solem ſit $\frac{1}{x^2}$, eaque in mediocri diſtantia accipiatur loco unitatis, atque inſuper $1 : n$ ſit ratio angularium motuum Planetæ inferioris, ſuperiorisque erit $\frac{x}{2a^3M} = \frac{n^2 x}{2M}$, acceptiſque cæteris omnibus ut in Probl. VIII. Lib. II., atque in ſubſequentibus corollariis, univerſim erit mediocris vis perturbatrix a Planeta ſuperiore juxta vectorem radium inferioris orbitæ exercita

$$\frac{n^2 x}{2M}\left(1 + \frac{9x^2}{8a^2} + \frac{75x^4}{64a^4}\right).$$

Quod ſi vero in inferiori, & ſuperiori orbita excentricitates ſint φ, & δ: anomaliæ motus cz, & mz: motus veri z, & $nz + 2\varphi n.\,\text{ſin.}\,cz - 2\delta.\,\text{ſin.}\,mz$; coſinu anguli STL eadem ratione reſoluto, qua in Probl. IV. Lib. IV. uſi ſumus, neglectiſque aliis inferiorum ordinum terminis, erit vis reliqua juxta vectorem radium exercita

$$\sigma = \frac{n^2 x^2}{2aM}\left(9 + \frac{75}{8a^2}\right).\text{coſ.}\,(1 - n).z$$

$$+ \frac{n^2 x}{2M}\left(3 + \frac{5}{2a^2} + \frac{315}{128a^4}\right).\text{coſ.}\,(2 - 2n).z$$

$+$

$$+\frac{15\,n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{cof.}\,(3-3n).z$$

$$-\frac{3\,\delta n^2}{2\,M}\,.\,\text{cof.}\,mz$$

$$-\frac{9\,\delta n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{cof.}\,(1-n+m).z$$

$$-\frac{27\,\delta n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{cof.}\,(1-n-m).z$$

$$+\frac{3\,\delta n^2 x}{4\,M}\,.\,\text{cof.}\,(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21\,\delta n^2 x}{4\,M}\,.\,\text{cof.}\,(2-2n-m).z.$$

Similibus etiam fubftitutionibus eruetur vis perpendicularis radio

$$\omega = -\frac{3\,n^2 x^2}{8\,a\,M}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\,\text{fin.}\,(1-n).z$$

$$-\frac{n^4 x}{2\,M}\left(3+\frac{5}{4\,a^2}+\frac{105}{128\,a^4}\right).\,\text{fin.}\,(2-2n).z$$

$$-\frac{15\,n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{fin.}\,(3-3n).z$$

$$+\frac{3\,\delta n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{fin.}\,(1-n+m).z$$

$$+\frac{9\,\delta n^2 x^2}{8\,a\,M}\,.\,\text{fin.}\,(1-n-m).z$$

$$-\frac{3\,\delta n^2 x}{4\,M}\,.\,\text{fin.}\,(2-2n+m).z$$

$$+\frac{21\,\delta n^2 x}{4\,M}\,.\,\text{fin.}\,(2-2n-m).z.$$

COROLLARIUM I.

His itaque affumptis perturbatricium virium expreffionibus, & ob parvitatem neglectis quadratis excentricitatis, inclinationifque uniufcujufque orbitæ ad eclipticam, loco æquationis differentialis, qua in Probl. II. Lib. IV. ad definiendam lunarem orbitam ufi fumus, pro fupputandis Planetarum inferiorum perturbationibus æquationem aliam habebimus

ddx

$$\frac{ddx}{dz^2} - \frac{2dx^2}{xdz^2} = x - x^2 + \frac{n^2x^3}{2M}\left(1 + \frac{9x^2}{8a^2} + \frac{75x^4}{64a^4}\right)$$
$$+ \alpha x^4 + 2x^2 \int \alpha x^3 dz - \alpha x^3 . \frac{dx}{dz}.$$

COROLLARIUM II.

Et cum juxta Probl. III. Lib. IV. sit $-\alpha x^3 . \frac{dx}{dz} = \alpha \varphi x^3 . \text{fin.} cz$, ac sit insuper $-\frac{2dx^2}{xdz^2} = 4\varphi . \text{fin.} cz . \frac{dt}{dz}$, neglectis inferiorum ordinum terminis, pro æquatione orbitarum inferiorum, quæ a Planetis superioribus perturbantur, habebimus

$$\frac{ddx}{dz^2} = x - x^2 + \frac{n^2x^3}{2M}\left(1 + \frac{9x^2}{8a^2} + \frac{75x^4}{64a^4}\right) - 4\varphi . \text{fin.} cz . \frac{dt}{dz}$$
$$+ \alpha x^4 + 2x^2 \int \alpha x^3 dz + \alpha \varphi x^3 . \text{fin.} cz.$$

COROLLARIUM III.

Si fiat $x = 1 + \varphi . \text{cof.} cz + t$, iisdemque semper fractionibus neglectis resolvantur de more quantitates x^2, x^3, x^5, x^7, & termini omnes ordinentur, fiet differentialis æquatio problematis

$$\frac{ddt}{dz^2} + \left(1 - \frac{n^2}{2M}\left(5 + \frac{63}{8a^2} + \frac{675}{64a^4}\right)\right) . t$$
$$= \frac{n^2}{2M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) + \varphi . \overline{c^2 - 1} . \text{cof.} cz - 4\varphi . \text{fin.} cz . \frac{dt}{dz}$$
$$+ \frac{n^2}{2M}\left(5 + \frac{63}{8a^2} + \frac{675}{64a^4}\right) . \varphi . \text{cof.} cz - 2\varphi t . \text{cof.} cz - t^2$$
$$+ \alpha x^4 + 2x^2 \int \alpha x^3 dz + \alpha \varphi x^3 . \text{fin.} cz.$$

PROBLEMA II.

Iisdem positis motum aphelii inferiorum orbitarum invenire.

Sit $-A$ quantitas constans, quæ exsurgit ex integratione termini $2\alpha x^3 dz$, atque ex resolutione termini $2x^2 \int \alpha x^3 dz$ primo eruantur quantitates $-2At - 2\varphi A . \text{cof.} cz$: ac deinde fiat

$$t = \frac{n^2}{2M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) - A + T,$$

nimirum T variabilem tantum vectoris radii differentiam illam defi-

designet, quæ a viribus perturbatricibus inducitur. Factis substitutionibus, ac prioribus tantum exscriptis terminis, qui quantitates T, & cos. cz involvunt, prodibit

$$-t^2 = -\frac{n^2}{M}\left(1+\frac{9}{8a^2}+\frac{75}{64a^4}\right).T + 2AT$$

$$-2\varphi t.\text{cos.}cz = -\frac{n^2}{M}\left(1+\frac{9}{8a^2}+\frac{75}{64a^4}\right).\varphi.\text{cos.}cz + 2\varphi A.\text{cos.}cz.$$

Quod si insuper $2x^2\int\omega x^2 dz$ designare in posterum intelligatur terminos alios variabiles, omissis binis prioribus, quos indicavimus, erit integra æquatio differentialis

$$\frac{ddT}{dz^2} + \left(1 - \frac{n^2}{M}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{45}{16a^2}+\frac{525}{128a^4}\right)\right).T$$

$$= \frac{n^2}{M}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{45}{16a^2}+\frac{525}{128a^4}\right).\varphi.\text{cos.}cz + \varphi.\overline{c^2-1}.\text{cos.}cz$$

$$+\varpi x^4 + 2x^2\int\omega x^2 dz + \omega\varphi x^2.\text{fin.}cz$$

$$-2\varphi T.\text{cos.}cz - 4\varphi.\text{fin.}cz.\frac{dT}{dz}.$$

Primo igitur si fiat $c = 1$, & motus ad ellipsim illam referatur, quæ sine viribus perturbatricibus describeretur in plano immobili, erunt priores integratæ æquationis termini

$$T = -\varphi.\text{cos.}z + \varphi.\text{cos.}\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{M}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{45}{16a^2}+\frac{525}{128a^4}\right)\right)}.z:$$

atque ita in expressione vectoris radii evanescet terminus $\varphi.\text{cos.}z$, & loco ipsius succedet alius, qui anomaliæ motum angulari motu circa focum exhibebit minorem in ratione subduplicata

$1-\frac{n^2}{M}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{45}{16a^2}+\frac{525}{128a^4}\right):1$. Hoc autem posito anomaliæ

motu si fiat $c^2 = 1-\frac{n^2}{M}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{45}{16a^2}+\frac{525}{128a^4}\right)$, proposita æquatio differentialis hanc aliam formam induet

$$\frac{ddT}{dz^2} + c^2T = \varpi x^4 + 2x^2\int\omega x^2 dz + \omega\varphi x^2.\text{fin.}cz$$

$$-2\varphi T.\text{cos.}cz - 4\varphi.\text{fin.}cz.\frac{dT}{dz}.$$

Co-

COROLLARIUM I.

Si requiratur motus aphelii Jovis, qui actione Saturni gignitur, & massæ Saturni, & Solis sint inter se ut $331 : 1000000$, & sit insuper $\frac{b}{a} = \frac{520098}{954007} = 0.545$, erit $c^2 = 0.9998556$, & $c = 0.999928$: adeoque angularis motus Jovis ad aphelii motum se habebit ut $1 : 0.000072$, & fiet singulis revolutionibus aphelii ipsius progressus juxta signorum ordinem $93.3''$. Si ratio mediocrium distantiarum Jovis, & Saturni a Sole assumatur ex lege temporum periodicorum, prodibit $c = 0.9999273$, ac fiet singulis revolutionibus aphelii motus $94.2''$, & annis singulis fere $8''$.

COROLLARIUM II.

Pariter si massæ Jovis, & Solis sint inter se ut $937 : 1000000$, motus annuus aphelii Terræ ob vim Jovis erit circiter $6\frac{1}{2}''$. In Planetis aliis inferioribus cum possint negligi omnes seriei termini præter primum, motus apsidum Jovis actione genitus revolutionibus singulis erit minor in duplicata ratione temporum periodicorum, sive in ratione triplicata distantiarum: & motum omnem augendo in ratione temporum, annuus aphelii motus fiet tempori periodico proportionalis. Erit itaque annuus aphelii motus in orbita Veneris $8''$, & in Mercurii orbita $3''$. Simili modo progressus apsidum Martis annis singulis erit circiter $13''$.

PROBLEMA III.

Æquationem eamdem differentialem evolvere, atque explicare.

Inprimis si eadem methodo Probl. V. Lib. IV. termini singuli resolvantur, fiet

$$2\int u\, x^2\, dz = \frac{3n^2}{4a\mathrm{M}.\overline{1-n}}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right)\cdot \text{cof.}\,(1-n).z$$

$$+ \frac{n^2}{2\mathrm{M}.\overline{1-n}}\left(3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}\right)\cdot \text{cof.}\,(2-2n).z$$

$$+ \frac{5n^2}{4a\mathrm{M}.\overline{1-n}}\cdot \text{cof.}\,(3-3n).z$$

$$+ \frac{\varphi n^2}{\mathrm{M}.(2-2n\mp c)}\left(6 + \frac{5}{2a^2}\right)\cdot \text{cof.}\,(2-2n\mp c).z$$

$$-\frac{3\delta n^2}{4aM}.\cos.(1-n+m).z$$
$$-\frac{9\delta n^2}{8aM.\overline{1-2n}}.\cos.(1-n-m).z$$
$$+\frac{3\delta n^2}{2M.\overline{2-n}}.\cos.(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21\delta n^2}{2M.\overline{2-3n}}.\cos.(2-2n-m).z.$$

Hisce autem terminis omnibus ductis in $x^2 = 1+2\varphi.\cos.cz$, solus exsurget terminus qui addi debeat

$$\frac{\varphi n^2}{2M.\overline{1-n}}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\cos.(2-2n\mp c).z.$$

Pariter terminis aliis, qui vim perturbatricem ϖ exprimunt, ductis in x^4, solus adjiciendus erit terminus

$$\frac{\varphi n^2}{M}\left(3+\frac{5}{2a^2}+\frac{315}{128a^4}\right).\cos.(2-2n\pm c).z$$

Atque ita terminis omnibus simul collectis, atque ordinatis fiet denique differentialis æquatio Problematis

$$\frac{ddT}{dz^2}+c^2T=\frac{3n^2}{8aM.\overline{1-n}}\left(5-2n+\frac{35-25n}{8a^2}\right).\cos.(1-n).z$$
$$+\frac{n^2}{2M.\overline{1-n}}\left(6-3n+\frac{15-10n}{4a^2}\right).\cos.(2-2n).z$$
$$+\frac{5n^2}{8aM.\overline{1-n}}(5-3n).\cos.(3-3n).z$$
$$+\frac{3\varphi n^2}{M}\left(\frac{5-3n}{4-4n}+\frac{2}{1-n}\right).\cos.(2-2n-c).z$$
$$+\frac{3\varphi n^2}{M}\left(\frac{7-5n}{4-4n}+\frac{2}{3-2n}\right).\cos.(2-2n+c).z$$
$$+\frac{3\delta n^2}{2M}\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\cos.(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21\delta n^2}{4M}\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right).\cos.(2-2n-m).z$$

— 15

$$-\frac{15\, n^2 \delta}{8\, a M}\,.\, \text{cos.}\,(1-n+m).z$$

$$-\frac{3\,\delta\, n^2}{2M}\,.\, \text{cos.}\; m z \;\&c.$$

$$-2\varphi\, T\,.\, \text{cos.}\, c z - 4\varphi\,.\, \text{sin.}\; c z\,.\,\frac{dT}{dz}\,.$$

COROLLARIUM.

Termini omnes priores accurate integrari possunt, posteriores autem priorum correctionem exhibent. Quod si loco differentiæ T assumatur terminus quispiam formæ μ. cos. Δz, substitutione facta erit correctio omnis, quæ binis terminis posterioribus exprimitur $-\varphi\mu\,(1 \pm 2\Delta)$. cos. $(\Delta \pm c).z$. Terminos alios argumenti $z - nz + mz - cz$ singillatim in posteriori libri hujus capite supputabimus.

PROBLEMA IV.

Invenire differentiam vectoris radii, quæ a viribus perturbatricibus inducitur.

Acceptis de more summis, & posito $c^2 = 1$, erit

$$\frac{-n^2\left(6 - 3n + \frac{15 - 10n}{4a^2}\right)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)}$$ coefficiens termini, qui pro argumento habebit $2z - 2nz$. Hic autem terminus si loco differentiæ T accipiatur, & posito $\Delta = 2 - 2n$ fit quam proxime

$$\mu = \frac{3n^2.(2-n)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)}$$, fiet etiam in differentiali æquatione ultimi corollarii correctio

$$\frac{3\varphi n^2.(2-n)(1 \pm 4 \mp 4n)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)}\,.\,\text{cos.}\,(2 - 2n \pm c).z.$$

Itaque hujusmodi correctionis ratione habita, reductisque coefficientibus omnibus, atque in reductione ipsa scribendo n loco m, eadem semper integrationum præcedentium methodo prodibit

$$T = \frac{3n\left(5 - 3n + \frac{35 - 25n}{8a^2}\right)}{8aM.(1-n)(2-n)}\,.\,\text{cos.}\,(1-n).z$$

$$-\frac{n^2\left(6 - 3n + \frac{15 - 10n}{4a^2}\right)}{2M(1-n)(3-8n+4n^2)}\,.\,\text{cos.}\,(2-2n).z$$

$$-\frac{5n^2(5-3n)\cdot\text{cof.}(3-3n)\cdot z}{8aM(1-n)(8-18n+9n^2)}$$

$$+\frac{3\varphi n}{4M(1-n)}\left(\frac{5-3n}{4-4n}+\frac{n}{1-2n}-\left(\frac{2-n}{2-2n}\right)\left(\frac{3-4n}{3-8n+4n^2}\right)\right)\cdot\text{cof.}(2-2n-c)\cdot z$$

$$-\frac{3\varphi n^2}{M(8-12n+4n^2)}\left(\frac{7-5n}{4-4n}+\frac{2}{3-2n}+\left(\frac{2-n}{2-2n}\right)\left(\frac{5-4n}{3-8n+4n^2}\right)\right)\cdot\text{c.}(2-2n+c)\cdot z$$

$$-\frac{3\delta n^2}{8M(3-4n+n^2)}\left(\frac{4-n}{2-n}\right)\cdot\text{cof.}(2-2n+m)\cdot z$$

$$+\frac{7\delta n^2}{4M(1-4n+3n^2)}\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right)\cdot\text{cof.}(2-2n-m)\cdot z$$

$$-\frac{15n^2\delta\cdot\text{cof.}(1-n+m)\cdot z}{8aM(c^2-(1-n+m)^2)}$$

$$-\frac{3\delta n^2}{2M(1-n^2)}\cdot\text{cof.}\,mz\ \text{\&c.}$$

Corollarium I.

Si loco $\frac{1}{1-n}$ fcribamus N, bini priores termini cum iis congruent, quos in Probl. X. Lib. II. alia methodo invenimus. Atque ita fi motus Terræ ad Jovem referatur, ac fiat $\frac{1}{M}=0.000937$, $n=\frac{1}{12}$, $a=51.98$, atque excentricitas orbitæ Jovis δ fit 0.048 radii mediocris; fubftitutionibus rite factis erit variatio præcipua radii mediocris terreftris orbitæ vi Jovis genita

$$T=0.0000158\cdot\text{cof.}(1-n)\cdot z-0.000009\cdot\text{cof.}(2-2n)\cdot z$$
$$-0.000000468\cdot\text{cof.}\,mz\ \text{\&c.}$$

Corollarium II.

Pariter fi requirantur perturbationes orbitæ Martis ob Jovis actionem genitæ, ac fiat $a=3.47$, & excentricitas ejufdem orbitæ affumatur partium 0.093 mediocris diftantiæ Martis a Sole, erunt variationes præcipuæ ipfius diftantiæ

$$T=0.00005\cdot\text{cof.}(1-n)\cdot z-0.00005\cdot\text{cof.}(2-2n)\cdot z$$
$$+0.0000327\cdot\text{cof.}(2-2n-c)\cdot z\ \text{\&c.}$$

Varia-

Variationes aliæ vectoris radii orbitarum Mercurii, & Veneris, ob Terræ, & Jovis actionem genitæ, exiguæ sunt, & similibus substitutionibus, eademque methodo singulæ supputari possunt.

Corollarium III.

Si requirantur variationes radii vectoris Jovis, quæ ex Saturni actione oriuntur, iisdem assumptis numeris Coroll. VI. Probl. X. Lib. II., & posito $\delta = 0.057$, erit $-\frac{15 n^2 \delta}{8 a M} = -0.0000031288$: ac si insuper juxta Coroll. I. Probl. II. libri hujus fiat $c^2 = 0.9998556$, & juxta Coroll. I. Probl. VII. assumatur $m = (1 - 0.00027) . n$, & $n = 0.4027$, erit $1 - n + m = 1 - 0.00010873$, & $c^2 - (1 - n + m)^2 = 0.000073$, atque ita primo eruetur $T = -0.04286 . \text{cos.} (1 - n + m) . z$. Si juxta Coroll. II. Problematis ejusdem assumeretur $m = (1 - 0.000319) . n$, eadem calculi serie prodiret $T = -0.02781 . \text{cos.} (1 - n + m) . z$.

Corollarium IV.

Quia vero alia quævis variatio exigua quantitatum proxime æqualium c^2, & $(1 - n + m)^2$, quæ in denominatore fractionis subduci debent a se invicem, quæque ex tot aliis elementis pendent, longe diversum exhiberet coefficientem illius termini, qui habet pro argumento elongationem, seu differentiam longitudinum Planetæ superioris, inferiorisque addita superioris anomalia; posito $z - nz + mz = z$, quod satis proxime verum est, ad evitandam calculi, & coefficientis incertitudinem præstabit terminos hujus generis, & qui ex viribus perturbatricibus Saturni, & qui ex ellipticitate, atque excentricitate orbitæ Jovis oriuntur, colligere in unam summam, quantitatemque totius æquationis centri ex observationibus determinare, ut Coroll. V. Probl. VI. Lib. I. præstitimus.

Corollarium V.

Posito etiam $\varphi = 0.048$, & longius producta serie alterius termini, qui pro argumento habet $2z - 2nz - cz$, primo occurret coefficiens

$$\frac{n \varphi}{4M(1-n)} \left(\frac{15 - 9n}{4 - 4n} + \frac{6}{1 - 2n} + \frac{15}{4a^2} + \frac{5}{2a^2(1 - 2n)} \right) = 0.0001084:$$

deinde vero supputaris terminis $-0.00061 . \text{cos.} (2 - 2n) . z$ &c., & posito $\mu = -0.00061$, $\Delta = 2 - 2n = 1.1946$, aliisque factis substitutionibus, correctionibusque, quas in superiore Problemate indicavimus, pro præcipuis variationibus radii vectoris Jovis habebimus

T =

$$T = 0.000135 \,.\, \text{cos.}(1-n).z - 0.00061 \,.\, \text{cos.}(2-2n).z$$
$$+ 0.0000765 \,.\, \text{cos.}(2-2n-c).z - 0.000025 \,.\, \text{cos.}(2-2n-c).z$$
$$- 0.000154 \,.\, \text{cos.}(2-2n-m).z - 0.0000337 \,.\, \text{cos.}\, mz.$$

PROBLEMA V.

Iisdem positis invenire æquationes motus inferiorum Planetarum, qui perturbantur a superioribus.

Reassumpta formula, qua in Probl. II., & VIII. Lib. IV. elementum temporis expressimus, neglectisque quadratis excentricitatis orbitæ inferioris, erit

$$d\theta = \frac{x^2 dz}{1 + \int \omega\, x^2 dz}$$

$$= (1 + 2\varphi . \text{cos.}\, cz + 2\,T)\,(1 - \int \omega\, x^2 dz).dz.$$

Quod si igitur valor quantitatum T, & $\int \omega\, x^2 dz$ accipiatur ex duobus Problematis præcedentibus, integratione facta tempus omne, seu motus medius Planetæ inferioris actione superioris spectata evadet

$$Z = z + 2\varphi . \text{sin.}\, cz + \tfrac{3}{4}\varphi^2 . \text{sin.}\, 2cz \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{3n}{4aM.(1-n)^2}\left(\frac{5-3n+\frac{35-25n}{8a^2}}{2-n} - \tfrac{1}{2}n\left(1+\frac{5}{8a^2}\right)\right).\text{sin.}(1-n).z$$
$$- \frac{n^2}{4M.(1-n)^2}\left(\frac{6-3n+\frac{15-10n}{4a^2}}{3-8n+4n^2} + 3 + \frac{5}{4a^2}\right).\text{sin.}(2-2n).z$$
$$- \frac{3\delta n}{M.(1-n^2)} . \text{sin.}\, mz \text{ \&c.}$$

Denique si media Planetæ utriusque distantia vocetur X, & sit Y anomalia media Planetæ superioris, inferioris autem cZ, seu proxime Z, neglectis aliis minoribus deductionibus prodibit

$$z = Z - 2\varphi . \text{sin.}\, Z + \tfrac{5}{4}\varphi^2 . \text{sin.}\, 2Z \text{ \&c.}$$
$$- \frac{3n}{4aM.(1-n)^2}\left(\frac{5-3n+\frac{35-25n}{8a^2}}{2-n} - \tfrac{1}{2}n\left(1+\frac{5}{8a^2}\right)\right).\text{sin.}\, X$$
$$+ \frac{n^2}{4M.(1-n)^2}\left(\frac{6-3n+\frac{15-10n}{4a^2}}{3-8n+4n^2} + 3 + \frac{5}{4a^2}\right).\text{sin.}\, 2X$$
$$+ \frac{3\delta n . \text{sin.}\, Y}{M.(1-n^2)} \text{ \&c.}$$

Co-

Corollarium I.

Si variationes omnes requirantur, quæ in motu Terræ, ſive ob æquabilem deſcriptionem arearum, ſive ob actionem Jovis haberi debent, iiſdem elementis calculi aſſumptis, quæ in Coroll.IV. Probl. VI. Lib.I., & Coroll.I. Probl. IV. libri hujus, erit verus Telluris motus circa Solem

$$z = Z - 1^\circ\ 55.5'.\ \text{ſin.}\,Z + 21''.\ \text{ſin.}\,2Z$$
$$- 7''.\ \text{ſin.}\,X + 2.5''.\ \text{ſin.}\,2X + 2.5''.\ \text{ſin.}\,Y.$$

Corollarium II.

Cumque actio Jovis in Venerem vix ſit ſenſibilis, ſpectata tantum actione Terræ juxta Coroll. V. Probl. XI. Lib. II. erit motus Veneris

$$z = Z - 49'\ 5''.\ \text{ſin.}\,Z$$
$$- 5''.\ \text{ſin.}\,X - 10''.\ \text{ſin.}\,2X :$$

ac pariter ſpectata tantum actione Jovis erit motus Martis

$$z = Z - 10^\circ\ 38'.\ \text{ſin.}\,Z + 37'.\ \text{ſin.}\,2Z - 3'.\ \text{ſin.}\,3Z$$
$$- 24''.\ \text{ſin.}\,X + 15.5''.\ \text{ſin.}\,2X$$
$$- 17''.\ \text{ſin.}\,2X - Z + 7''.\ \text{ſin.}\,X - Y.$$

Corollarium III.

Spectata denique Saturni actione pro motu Jovis circa Solem habebimus

$$z = Z - 5^\circ\ 32'.\ \text{ſin.}\,Z + 10'.\ \text{ſin.}\,2Z - 25''.\ \text{ſin.}\,3Z$$
$$- 1'\ 26''.\ \text{ſin.}\,X + 3'\ 44''.\ \text{ſin.}\,2X$$
$$- 1'\ 59''.\ \text{ſin.}\,2X - Z - 6''.\ \text{ſin.}\,2X + Z$$
$$+ 1'\ 39''.\ \text{ſin.}\,2X - Y + 34''.\ \text{ſin.}\,Y.$$

Scholion.

Cum igitur inveſtigationibus omnibus a Luna ad Planetas inferiores traductis, qui perturbantur a ſuperioribus, plures quidem ſerierum terminos ſupputare oporteat, ſed plures etiam quantitates, ac correctiones ſint negligendæ, ut quæ ex quadrato excentricitatis, motu apſidum, & nodorum, atque inclinatione orbitarum pendent; differentialis æquatio problematis ita diſponi potuit, ut quintam tantum vectoris radii poteſtatem involveret. Quo dato, & collectis ſimul

ſimul quantitatibus omnibus, quæ coefficientem ſecundi æquationis ejuſdem termini conſtituunt, aphelii motum revolutionibus ſingulis eſſe invenimus in Terra quidem $6\frac{1}{2}''$, in Jove autem $94''$. Eulerus in diſſertatione de perturbatione motus Planetarum, quæ anno 1756. a Pariſienſi Academia præmium retulit, motum annuum aphelii Terræ invenit eſſe $6'' \, 57'''$: in diſſertatione autem alia de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, quæ obtinuit præmium anno 1752., motum aphelii Jovis revolutionibus ſingulis invenit $114''$. D. la Grange To. III. Academiæ Taurinenſis motum eumdem ſupputavit $86\frac{1}{5}''$: quos inter numeros, quem pro aphelii motu deprehendimus, eſt fere medius. Unicus etiam hac noſtra methodo valor eruitur pro motu aphelii orbitarum inferiorum æque, ac ſuperiorum: nec niſi unicus valor ipſe vere eſſe poteſt. Terminus alius, qui pro argumento habet elongationem Planetæ ſuperioris ab inferiore addita ſuperioris ipſius Planetæ anomalia, quique pro aphelii motu valorem alterum exhibere viſus eſt ſummis Geometris la Grange, & Alembert To. V & VI. Opuſc. Mathem., ſi ſingillatim methodo hac noſtra ſupputetur, ut in Coroll. III. & IV. Probl. V. præſtitimus, non niſi illam variationem exprimit æquationis centri, quæ a viribus perturbatricibus inducitur. Æquationes aliæ mediorum motuum Jovis, Martis, Terræ, ac Veneris, quas ſimiliter ex generali ſolutione problematis collegimus, proxime cum iis congruunt, quas Authores alii exhibuerunt. Priores æquationes medii motus Jovis, quas ſupputaverat Eulerus in diſſertatione jam memorata anni 1752., reductis numeris eſſe debent $- 1' \, 32''. \text{ſin.} X + 3' \, 48''. \text{ſin.} 2X$. Eulerus etiam in diſſertatione alia anni 1756. æquationes motus Terræ conſtituit $- 7.06''. \text{ſin.} X + 2.67''. \text{ſin.} 2X$: eoſdemque fere numeros exhibuit Clairaut in actis Pariſienſis Academiæ anni 1754. Theoriam Martis D. la Lande expoſuit in actis anni 1759., atque in ſubſequenti anno theoriam Veneris. Et quidem poſito quod maſſa Terræ ſit $\frac{1}{169282}$ quantitatis materiæ Solis, æquationes Veneris ſtatuit $- 9.6''. \text{ſin.} X - 22''. \text{ſin.} 2X$. Martis vero æquationes definivit ipſe

$$- 25.74''. \text{ſin.} X \;\; + 12.21''. \text{ſin.} 2X$$

$$+ 9.25''. \text{ſin.} X - Z \;\; - 17.62''. \text{ſin.} 2X - Z.$$

CA-

CAPUT SECUNDUM.

DE THEORIA PLANETARUM SUPERIORUM, QUI PERTURBANTUR AB INFERIORIBUS.

PROBLEMA VI.

INvenire vires, quibus Planetæ ſuperiores perturbantur ab inferioribus.

Sit excentricitas inferioris Planetæ φ, ſuperioris δ, & motus illius quidem z, hujus autem $nz + 2\varphi n . \sin . cz - 2\delta . \sin . mz$: adeoque ſinus, & coſinus anguli STL ſemel, ac bis accepti iiſdem adhuc formulis exprimantur, quas in Probl. IV. Lib. IV. tradidimus. Deinde vero, poſitis omnibus ut in Probl. XII. Lib. II., ſi loco b ſcribamus x, & $a(1 + \varphi . \operatorname{cof.} cz)$ loco a, erit mediocris vis perturbatrix, quæ gravitati Planetæ ſuperioris actione inferioris adjicietur $\frac{3a^2}{4Mx^4}\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right) + \frac{3}{2}a^2\varphi . \operatorname{cof.} cz$: vis autem reliqua juxta vectorem radium exercita, reſolutis ſimiliter terminis a^3, a^4, coſ. STL, coſ. 2STL &c., neglectiſque fractionibus inferiorum ordinum evadet

$$\begin{aligned}
\pi = {} & \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2a}{x^3} + \frac{3a^3}{2x^5} + \frac{45a^5}{32x^7}\right) . \operatorname{cof.} (1 - n) . z \\
& + \frac{a^2}{4Mx^4}\left(9 + \frac{25a^2}{4x^2}\right) . \operatorname{cof.} (2 - 2n) . z \\
& + \frac{5a^3}{2Mx^5} . \operatorname{cof.} (3 - 3n) . z \\
& \mp \frac{\delta}{M}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2a}{x^3} + \frac{3}{2}a^3\right) . \operatorname{cof.} (1 - n \mp m) . z \\
& \mp \frac{9a^2\delta}{2M} . \operatorname{cof.} (2 - 2n \mp m) . z \\
& - \frac{\varphi}{M}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{x^3} - \frac{9a^3}{4x^5}\right) . \operatorname{cof.} (1 - n \pm c) . z \\
& + \frac{a^2\varphi}{4M}\left(9 \mp 18n + \frac{25a^2}{2} . (1 \mp n)\right) . \operatorname{cof.} (2 - n \pm c) . z .
\end{aligned}$$

Quia

Quia vero cum Planeta uterque digreditur a conjunctione vis alia Planetæ inferioris tendit in eamdem plagam, & cum directione motus Planetæ superioris conspirat, similibus substitutionibus eruetur vis perpendicularis vectori Planetæ ipsius radio

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{x^3} - \frac{3a^3}{8x^5}\right).\text{fin.}(1-n).z \\ & +\frac{1}{M}\left(\frac{3a^2}{2x^4} + \frac{5a^4}{8x^6}\right).\text{fin.}(2-2n).z \\ & +\frac{15a^3}{8Mx^5}.\text{fin.}(3-3n).z \\ & \pm\frac{\delta}{M}\left(\frac{1}{a^2} - a - \frac{3}{8}a^3\right).\text{fin.}(1-n\mp m).z \\ & \mp\frac{3a^2\delta}{M}.\text{fin.}(2-2n\mp m).z \\ & +\frac{\varphi}{M}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{a}{2x^3} + \frac{9a^3}{16x^5}\right).\text{fin.}(1-n\mp c).z \\ & \pm\frac{a^2\varphi}{M}\left(\frac{3}{2} + 3n + \frac{5}{4}a^2.(1+n)\right).\text{fin.}(2-2n\mp c).z. \end{aligned}$$

COROLLARIUM I.

Cum superioris Planetæ motus sit proxime $n\,dz$, retentis denominationibus anteeedentibus, formulæ omnes Probl. II. Lib. IV. abibunt in has alias

$$d\theta = \frac{n x^2 dz}{1 + \int \omega x^3 n\,dz}$$

$$F = \frac{1 + 2\int \omega x^3 n\,dz}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{3a^2}{4Mx^4}\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right) - \varpi$$

$$\frac{ddx}{n^2 dz^2} - \frac{2dx^2}{x} = x - x^2 - \frac{3a^2}{4M}\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right) - 2x^2\int \omega x^3 n dz - \varpi x^4 - \omega x^3.\frac{dz}{ndz}.$$

COROLARIUM II.

Erit etiam $F.d\theta^2 = ddx - \frac{2dx^2}{x} + \omega x^3 dx.ndz$

$$= n^2 x dz^2\left(1 \frac{-x}{1+2\int \omega x^3 ndz}\right) - \frac{3n^2a^2dz^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right) - \varpi n^2 x^4 dz:$$

ac

ac posito $x = 1 + \delta.\cos. mz + t$, solitis substitutionibus prodibit

$$\frac{ddt - m^2\delta.\cos. mz.dz^2}{n^2dz^2}$$

$$= -\frac{3a^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right) - t - t^2$$

$$-\delta.\cos. mz.(1+2t) - 4t\delta.\sin. mz.\frac{dt}{ndz}$$

$$-\alpha x^4 + 2x^2\int \alpha x^3 ndz + \alpha\delta x^2.\sin. mz.$$

PROBLEMA VII.

INvenire aphelii motum in orbitis superioribus.

Si quantitas constans, quæ ex termino $2\int\alpha x^3 ndz$ exsurgit, sit $-A$, atque ex resolutione termini $2x^2\int\alpha x^3 ndz$ primo habeatur $-2A\delta.\cos. mz - 2At$, ac si præterea binis hisce posterioribus terminis exceptis quantitas omnis $2x^2\int\alpha x^3 ndz$ dumtaxat alios variabiles terminos designare in posterum intelligatur, pro æquatione corollarii antecedentis habebimus

$$\frac{ddt}{n^2dz^2} = -A - \frac{3a^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right) - 2At - t - t^2$$

$$+\delta.\cos. mz\left(\frac{m^2-n^2}{n^2} - 2t\right) - 4t\delta.\sin. mz.\frac{dt}{ndz}$$

$$-\alpha x^4 + 2x^2\int\alpha x^3 ndz + \alpha\delta x^2.\sin. mz.$$

Fiat jam $t = -A - \frac{3a^2}{4M}.\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right) + T$,

adeoque $-t^2 = 2AT + \frac{3a^2T}{2M}.\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)$.

Resolvetur æquatio ipsa in hanc aliam

$$\frac{ddT}{n^2dz^2} + \left(1 - \frac{3a^2}{2M}\left(1+\frac{15a^2}{16}\right)\right).T$$

$$= \delta.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right).\cos. mz + \frac{3a^2\delta}{2M}.\left(1+\frac{15a^2}{16}\right).\cos. mz$$

$$-2\delta T.\cos. mz - 4\delta T.\sin. mz.\frac{dT}{ndz}$$

$$-\alpha x^4 + 2x^2\int\alpha x^3 ndz + \alpha x^2.\sin. mz.$$

Rursus igitur motu ad priorem ellipsim illam relato, quæ sine

viribus perturbatricibus describeretur in plano immobili, & posito $m = n$, fiet

$$T = - \delta . \left(\text{cos.}\, nz - \text{cos.}\, n . \sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M} . \overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)} . z \right)$$

$$x = 1 + T = 1 + \delta . \text{cos.}\, n . \sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M} . \overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)} . z :$$

atque ita pro angulari motu nz vere habebimus anomaliæ motum $n . \sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M} . \overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)} . z = mz$, & substituto valore quantitatis m fiet æquatio differentialis vectoris radii superioris cujusque orbitæ

$$\frac{ddT}{dz^2} + m^2 T = 2n^2 x^3 \int n x^3 n dz - a n^2 x^4$$
$$+ a\delta n^2 x^3 . \text{sin.}\, mz - 4n^2 \delta T . \text{sin.}\, mz . \frac{dT}{n dz} .$$

COROLLARIUM I.

Si requiratur motus aphelii Saturni, qui Jovis actione gignitur, & fiat $\frac{1}{M} = 0.000937$, & $a = 0.5454$, prodibit ratio angularis motus ad motum Saturni a summa apside $\sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M} . \overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)} : 1 = 0.99973 : 1$ circiter, & singulis Saturni revolutionibus habebitur progressus apsidum respectu fixarum circiter $351''$, & annis singulis fere $11\frac{2}{3}''$.

COROLLARIUM II.

Quod si approximatione longius perducta, & altero etiam supputato seriei termino sit vis mediocris perturbatrix $\frac{a^2}{4M}\left(3 + \frac{45}{16}a^2 + \frac{175}{64}a^4\right)$, erit motus Saturni a summa apside singulis revolutionibus $\frac{360°}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{2M}\left(3 + \frac{45}{16}\overline{a^2 + \frac{175}{64}a^4}\right)\right)}}$: & si ex Hallejanis tabulis ad annum 1750. assumatur $a = 0.57$, ac fit insuper $\frac{1}{M} = 0.0009372$, erit motus idem $415''$.

PRO-

PROBLEMA VIII.

Æquationem differentialem orbitarum earumdem explicare.

Posito $x = 1 + \delta . \text{cos.}\, mz$, & vi perpendiculari ad vectorem radium assumpta ut in Probl. VI. libri hujus, omissis terminis argumenti $z - nz - cz + mz$, quos singillatim suo loco supputabimus, aliisque ordine explicatis fiet

$$\begin{aligned} nx^3 n dz = & -\frac{n}{M}\left(\frac{1}{a^2} - a - \frac{3}{8}a^3\right). \text{fin.}\,(1-n).z \\ & + \frac{n}{2M}\left(3a^2 + \frac{5}{4}a^4\right). \text{fin.}\,(2-2n).z \\ & + \frac{15na^3}{8M}. \text{fin.}\,(3-3n).z \\ & - \frac{n\delta}{M}\left(\frac{5}{2a^2} - a\right). \text{fin.}\,(1-n+m).z \\ & - \frac{n\delta}{M}\left(\frac{1}{2a^2} - a\right). \text{fin.}\,(1-n-m).z \\ & + \frac{9a^2 n\delta}{4M}. \text{fin.}\,(2-2n+m).z \\ & - \frac{15a^2 n\delta}{4M}. \text{fin.}\,(2-2n-m).z \\ & - \frac{en}{M}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2}a\right). \text{fin.}\,(1-n-c).z \\ & + \frac{a^2 en}{M}\left(\frac{3}{a} + 3n + \frac{5}{4}a^2.\overline{1+n}\right). \text{fin.}\,(2-2n-c).z. \end{aligned}$$

Hisce autem terminis more solito integratis, ac deinde ductis in $2n^2 x^2$, termino $\frac{2n^2}{M.\,1-n}\left(\frac{1}{a^2} - a - \frac{3}{8}a^3\right). \text{cos.}\,(1-n).z$ oportebit addere $\frac{2n^2\delta}{M.\,1-n}\left(\frac{1}{a^2} - a\right). \text{cos.}\,(1-n \pm m).z$, ac pariter addere $\frac{-3n^2 a^2 \delta}{2M.\,1-n}. \text{cos.}\,(2-2n \pm m).z$ termino $\frac{-n^2 a^2}{2M.\,1-n}\left(3 + \frac{5}{4}a^2\right). \text{cos.}(2-2n).z$. Evoluta pariter quantita-

te $\varpi n^2 x^4$, terminis omnibus, qui vim ϖ juxta Probl. VI. exprimunt, addendi insuper erunt termini

$$-\frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{2}{a^2}+a\right).\,\mathrm{cos.}(1-n\pm m).z-\frac{9a^2\delta}{2M}.\mathrm{cos.}(2-2n\pm m).z.$$

Denique cum minoribus aliis fractionibus neglectis fit

$$a\,\delta n^2.\,\mathrm{sin.}\,mz=\mp\frac{n^2\delta}{2M}\left(\frac{1}{a^2}-a\right).\,\mathrm{cos.}(1-n\mp m).z$$

$$\pm\frac{3a^2n^2\delta}{4M}.\,\mathrm{cos.}(2-2n\mp m).z$$

terminis simul omnibus collectis, atque ordinatis fiet $\frac{ddT}{dz^2}+m^2T$

$$=\frac{n^2}{M.\overline{1-n}}\left(\frac{3n-1}{a^2}-2a-\frac{3}{4}a^2.\overline{2-n}\right).\,\mathrm{cos.}(1-n).z$$

$$-\frac{n^2a^2}{2M.\overline{1-n}}\left(\frac{3}{2}.\overline{3-n}+\frac{5}{8}a^3.\overline{5-3n}\right).\,\mathrm{cos.}(2-2n).z$$

$$-\frac{5n^2a^3}{4M}\left(\frac{2-n}{1-n}\right).\,\mathrm{cos.}(3-3n).z$$

$$+\frac{3\varphi n^2}{Ma^2}.\,\mathrm{cos.}(1-n-c).z$$

$$+\frac{a^2\varphi n^2}{M}\left(\frac{9}{4}+\frac{9n}{2}+\frac{3n+6n^2}{1-2n}+\frac{5}{2}a^3\left(\frac{5+5n}{4}+\frac{1+n}{1-2n}\right)\right).\mathrm{cos.}(2-2n-c).z$$

$$+\frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{7n-5n^2}{a^2(1-n)}-\frac{4a+2an}{1-n}-\frac{5}{2}.\overline{\frac{1}{a^2}+a}\right).\,\mathrm{cos.}(1-n+m).z$$

$$+\frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{n}{1-2n}\left(\frac{1}{a^2}-2a\right)+\frac{2n}{1-n}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)-\frac{3}{2a^2}+\frac{3a}{2}\right).\,\mathrm{cos.}(1-n-m).z$$

$$-\frac{3n^2a^2\delta}{M}\left(\frac{3n}{4-2n}+\frac{n}{2-2n}+\frac{13}{4}\right).\,\mathrm{cos.}(2-2n+m).z$$

$$+\frac{3n^2a^2\delta}{2M}\left(\frac{5n}{2-3n}-\frac{n}{1-n}+\frac{1}{2}\right).\,\mathrm{cos.}(2-2n-m).z$$

$$-2\delta T.\,\mathrm{cos.}\,mz-4\delta T.\,\mathrm{sin.}\,mz.\frac{dT}{ndz}.$$

Corollarium.

Eadem igitur methodo, qua pro inferiorum Planetarum orbitis usi sumus, priores æquationis terminos integrando, eorumque valorem

rem ſubſtituendo in binis terminis poſterioribus, corrigendoque alios ex aliis, ad verum quæſitæ differentiæ valorem accedere quiſque poterit quantum voluerit. Coefficientes autem omnium terminorum cum ab analogis aliis Probl. IV. differant, non-niſi reaſſumpto calculo, & ſingulis reductionibus æquatio a Planetis inferioribus ad ſuperiores traduci poterit.

PROBLEMA IX.

Iiſdem poſitis differentiam vectoris radii, & angularis motus invenire.

Æquatione differentiali ad problematis ſuperioris formam reducta, & ſummis omnibus eadem ſemper methodo acceptis fiet T

$$= \frac{-n^2}{M.(1-n)(1-2n)}\left(\frac{3n-1}{a^2} - 2a - \frac{3}{4}a^2.\overline{2-n}\right).\text{coſ.}(1-n).z$$

$$+ \frac{n^2a^2}{2M.(1-n)}\left(\frac{\frac{3}{2}.\overline{3-n} + \frac{5}{8}a^2.\overline{5-3n}}{4-8n+3n^2}\right).\text{coſ.}(2-2n).z$$

$$+ \frac{5n^2a^2}{4M.(1-n)}\left(\frac{2-n}{9-18n+8n^2}\right).\text{coſ.}(3-3n).z$$

$$- \frac{3\varphi n^2.\ \text{coſ.}(1-n-c).z}{Ma^2.(n^2-(1-c-n)^2)}$$

$$+ \frac{a^2\varphi n^2}{M.(1-4n+3n^2)}\left(\frac{9}{4}+\frac{9n}{2}+\frac{3n+6n^2}{1-2n}+\frac{5}{2}a^2\left(\frac{5+5n}{4}+\frac{1+n}{1-2n}\right)\right).\text{c.}(2-2n-c).z$$

$$- \frac{n^2\delta}{M.(1-n)(1-n^2)}\left(\frac{7n-5n^2}{a^2.(1-n)} - \frac{4a+2an}{1-n} - \frac{5}{2}.\overline{\frac{1}{a^2}+a}\right).\text{coſ.}(1-n+m).z$$

$$- \frac{n^2\delta}{M.(1-4n+3n^2)}\left(\frac{n}{1-2n}\left(\frac{1}{a^2}-2a\right)+\frac{2n}{1-n}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)-\frac{3}{2a^2}+\frac{3a}{2}\right).\text{c.}(1-n-m).z$$

$$+ \frac{3a^2n^2\delta}{M.(4-4n)}\left(\frac{3n}{4-2n}+\frac{n}{2-2n}+\frac{13}{4}\right).\text{coſ.}(2-2n+m).z$$

$$- \frac{3a^2n^2\delta}{M}\left(\frac{\frac{5n}{2-3n}-\frac{n}{1-n}+\frac{1}{2}}{4-12n+8n^2}\right).\text{coſ.}(2-2n-m).z \ \&c.$$

Quare cum juxta Coroll. I. Probl. VI. eſſe debeat

$$d\theta = nx^2\,dz\left(1-\int \omega x^3 n\,dz\right)$$

$$= n\,dz\left(1+2\delta.\ \text{ſin.}\,mz + 2T\right)\left(1-\int \omega x^3 n\,dz\right),$$ ne-

neglectis minoribus correctionibus, unde nihil potest emergere, quod sit sensibile, duplam eamdem differentiam vectoris radii ducendo in $n\,d\zeta$, atque inde subducendo $n\,d\zeta \int \alpha x^{\prime} n\,d\zeta$, integrandoque, singulæ medii, verique motus æquationes singillatim ad calculum reduci poterunt.

COROLLARIUM I.

Si formulis ad Saturnum traductis, ut in Coroll. IV. Probl. X. Lib. II., & in Coroll. III. Probl. IV. libri hujus, fiat $a = 0.5454$, $n = 0.4027$, $e = 0.048$, $\delta = 0.057$, factis substitutionibus omnibus prodibit differentia vectoris radii, quæ Jovis actione gignitur

$$
\begin{aligned}
T = {} & 0.0008308 \cdot \text{cos.}(1-n).\zeta && + 0.000024 \cdot \text{cos.}(1-n+m).\zeta \\
& + 0.000134 \cdot \text{cos.}(2-2n).\zeta && + 0.000057 \cdot \text{cos.}(1-n-m).\zeta \\
& + 0.000029 \cdot \text{cos.}(3-3n).\zeta && - 0.000383 \cdot \text{cos.}(2-2-nc).\zeta \ \&c.
\end{aligned}
$$

COROLLARIUM II.

Quare ex differentia vectoris radii colligendo æquationes medii, & veri motus, adjiciendoque æquationes alias, quæ ex ellipticitate orbitæ oriuntur, si motus verus Saturni vocetur $n\zeta$, medius autem nZ, & anomalia media Saturni sit Y; erit verus Saturni motus in longitudinem

$$
\begin{aligned}
n\zeta = nZ - 6^{\circ}\, 30^{\prime} \cdot \text{sin.}\, nZ + 14^{\prime} \cdot \text{sin.}\, 2nZ - 41^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, 3nZ \\
+ 5.7^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, X \qquad - 10^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, (X+Y) \\
- 29.4^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, 2X \qquad - 47^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, (X-Y) \\
- 8.4^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, 3X \qquad + 5^{\prime}\, 20^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, (2X-Z).
\end{aligned}
$$

COROLLARIUM III.

Pariter si requirantur inæqualitates Terræ, quæ ex Veneris actione ortum ducunt, & fiat $n = \frac{2246176}{3652565} = 0.615$, & $a = 0.7233$, prodibit primum

$$T = -\frac{0.98}{M} \cdot \text{cos.}\,(1-n).\zeta + \frac{5.473}{M} \cdot \text{cos.}\,(2-2n).\zeta,$$

& si quantitas materiæ Veneris præ Solis massa sit 0.00000326, & media Veneris distantia a Terra vocetur $X^{\prime}$, prodibunt æquationes binæ

$$+ 4^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, X^{\prime} - 6^{\prime\prime} \cdot \text{sin.}\, 2X^{\prime}$$

Scho-

SCHOLION.

Clarifs. la Grange iifdem affumptis calculi numerici elementis, quibus in Coroll. II. Probl. VII. motum aphelii Saturni invenimus revolutionibus fingulis 415'' circiter Jovis actione effe oportere, tomo tertio Academiæ Taurinenfis, motus ejufdem quantitatem definivit 471.8''. Differentia omnis integro minuto eft minor, atque inde fortaffe oritur quod calculum ultra tres primos terminos feriei, quæ anomaliæ motum exprimit, Geometra ingeniofiffimus perduxerit. Aliæ etiam, quas exhibuimus, æquationes motus Terræ, & Saturni proxime ad calculos Clairautii, & Euleri accedunt tribus exceptis pofterioribus æquationibus Saturni, in quibus figni, & coefficientium differentia fubductis fæpius numeris major prodiit. Clairaut in actis Parifienfibus anni 1754, eadem methodo, qua inæqualitates motuum lunarium inveftigaverat, ad Planetas alios traducta cum inquififfet quæ motus Terræ inæqualitates ob vires Jovis, ac Veneris haberi debeant, & Veneris maffam ftatuiffet 0.00000516, priores Terræ æquationes eruit 10''. fin. X' — 11''. fin. 2X'. Eulerus in differtatione, quam antea memoravimus, de perturbatione motus Planetarum; in eadem fere hypothefi, quam in pofteriori corollario affumpfimus, quantitatis materiæ Veneris, coefficientes binarum æquationum eruit 5.75'', & 6''. In priori vero differtatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, §. LXXXI., æquationes veri motus Saturni in longitudinem ftatuit Eulerus

+ 4''. fin. X.	+ 13''. fin. X + Y
— 32''. fin. 2 X	— 257''. fin. X — Y
— 7''. fin. 3 X	— 243''. fin. 2 X — Z.

CAPUT TERTIUM.

DE VARIATIONIBUS TEMPORUM PERIODICORUM.

PROBLEMA X.

INvenire æquationem temporis periodici Planetæ cujuslibet inferioris, quæ pendet ex data, & conftanti diftantia apfidum utriufque orbitæ inferioris, fuperiorifque.

Sit

Sit $1:n$ ratio mediorum motuum Planetæ inferioris, ac ſuperioris, atque a conjunctione incipiendo ſit longitudo Planetæ inferioris z. Sit etiam generatim pro qualibet poſitione apſidum, atque orbitarum angularis diſtantia a ſumma apſide in inferiore quidem Planeta u, in ſuperiore autem v: ac ſit denique excentricitas illius φ, & hujus δ. Reaſſumpto calculo Probl. IV. Lib. IV. erit longitudo Planetæ ſuperioris $nz - 2\delta . \text{ſin.} v + 2\varphi n . \text{ſin.} u$, atque in fig. 36. erit

$$\begin{aligned} \text{ſin. STL} &= \text{ſin.}(z - nz + 2\delta . \text{ſin.} v - 2\varphi n . \text{ſin.} u) \\ &= \text{ſin.}(1-n).z + \delta . \text{ſin.}(z - nz + v) \\ &\quad + n\varphi . \text{ſin.}(z - nz - u) + n\varphi\delta . \text{ſin.}(z - nz + v - u). \end{aligned}$$

Deinde vero in Probl. XII. Lib. II. loco $\frac{1}{a^2}$ ſcribendo $\frac{1 - 2\delta . \text{coſ.} v}{a^2}$,

& $\frac{1 - 4\delta . \text{coſ.} v}{a^4}$ loco $\frac{1}{a^4}$, pro priori termino $-\frac{3}{8a^4}\frac{x^2}{M}\left(1 + \frac{5x^2}{8a^2}\right) . \text{ſin. STL}$, qui vim perturbatricem radio vectori normalem exprimit, habebimus

$$-\frac{3x^2}{8a^4 M}(1 - 4\delta . \text{coſ.} v)\left(1 + \frac{5x^2}{8a^2} . \overline{1 - 2\delta . \text{coſ.} v}\right)\begin{pmatrix} \text{ſin.}\ z - nz \\ + \delta . \text{ſin.}\ z - nz + v \\ + n\varphi . \text{ſin.}\ z - nz - u \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3n\varphi\delta}{8a^4 M}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right) . \text{ſin.}(z - nz + v - u).$$

Rurſus priore termino ex duobus his poſterioribus reſoluto ſolitis regulis trigonometricis prodibunt bini alii termini

$$+\frac{3n\varphi\delta}{4a^4 M}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right) . \text{ſin.}(z - nz + v - u)$$

$$+\frac{3\delta x^2}{8a^4 M}\left(1 + \frac{5x^2}{4a^2}\right) . \text{ſin.}(z - nz + v).$$

Denique loco x ſcribendo $1 + \varphi . \text{coſ.} u$, in reſolutione quantitatis $2\omega x^3$ ex hoc ipſo poſtremo termino eruemus

$$\frac{3\delta}{4a^4 M}(1 + 5\varphi . \text{coſ.} u)\left(1 + \frac{5}{4a^2}\overline{1 + 2\varphi . \text{coſ.} u}\right) . \text{ſin.}(z - nz + v),$$

atque inde ſolitis reductionibus novus exſurget terminus

$$\frac{15\varphi\delta}{8a^4 M}\left(1 + \frac{7}{4a^2}\right) . \text{ſin.}(z - nz + v - u).$$

Simul

Simul itaque colligendo antecedentes alios argumenti hujus terminos in expressione quantitatis $2\omega x^{2}dz$ occurret integer terminus

$$\frac{3\varphi\delta}{8a^{4}M}\left(5+n+\frac{5}{4a^{2}}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right).\text{sin}.(z-nz+v-u).dz.$$

Jam vero si initio a conjunctione duorum Planetarum ducto sit longitudo aphelii inferioris orbitæ p, erit anomaliæ angulus $u=z-p$: & si longitudo aphelii superioris vocetur q, neglectis aliis minoribus fractionibus, quæ alios minores terminos argumenti alterius suppeditarent, erit $v=nz-q$: & si fiat insuper $\frac{3\varphi\delta}{8a^{4}M}\left(5+n+\frac{5}{4a^{2}}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right)=A$, loco præcedentis termini habebimus $A.\text{sin}.(p-q).dz=-A.\text{sin}.(q-p).dz$. Quod si igitur ob exiguum aphelii utriusque motum, ac tanto minorem duorum motuum differentiam, differentia longitudinum $q-p$ dato aliquo tempore censeatur constans, reassumptis calculis Probl. III., IV., & V. libri hujus fiet $2\int\omega x^{2}dz=-A.\text{sin}.(q-p).z=T$, & elementum medii temporis revolutionis integræ in ellipsi erit

$$d\theta=(1+2T-\int\omega x^{2}dz).dz=(1-\tfrac{3}{2}A.\text{sin}.\overline{q-p}.z).dz,$$

eritque æquatio temporis totius periodici

$$-\frac{3}{4}A.\text{sin}.(q-p).z^{2}=-\frac{9\varphi\delta}{32a^{4}.M}.\left(5+n+\frac{5}{4a^{2}}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right).\text{sin}.(q-p).z^{2}.$$

Corollarium I.

Primo igitur cum $\omega x^{2}dz$ juxta Probl. I. Lib. IV. designet accelerationem areæ descriptæ circa focum, manifestum est velocitatem mediam Planetæ cujuslibet inferioris, data apheliorum distantia a se invicem, actione Planetarum superiorum minui, vel augeri oportere prout aphelium orbitæ superioris juxta signorum ordinem antecedet, vel subsequetur aphelium inferioris alterius orbitæ: & quidem cum elementum areæ ellipticæ, seu medii temporis sit $\frac{1}{2}x^{2}dz$, si accipiatur summa omnium $\frac{1}{2}\omega x^{2}dz$, pro decremento, aut incremento velocitatis mediæ projectionis prodibunt priores termini seriei, quam alia ratione, ac methodo jam exposuimus in Propos. XLVIII. Lib. III. de Gravitate, atque in opusculo de acceleratione, & retardatione motus Planetarum, quod in priori parte To. V. Comment. Bonon. impressum est.

Corollarium II.

Cum aphelium Saturni signis fere $2\frac{2}{3}$ antecedat aphelium Jovis in consequentia, patet Saturni actione mediam velocitatem Jovis, & periodicum tempus minui oportere : & quidem differentia velocitatis erit in simplici longitudinis, seu medii temporis ratione, æquatio autem temporis periodici erit in eadem ratione temporis duplicata. Et cum apogæum Solis sit circa 8° Cancri, & Terræ aphelium ex adverso signo respondeat, præcedatque integro fere quadrante apsidem summam Jovialis orbitæ, periodicum tempus Terræ potius augebitur actione Jovis. Id ipsum in orbitis etiam Mercurii, & Veneris continget. Actio etiam Martis ad producendum anni solaris tempus conducet ratione aliqua, videndumque erit dumtaxat quibus Planetis sensibilis periodici temporis æquatio gigni possit.

Corollarium III.

Si z non angulum descriptum circa centrum, sed revolutionum absolutarum numerum designet, loco z in superiori formula scribendo $z.360°$, & pro unitate assumendo arcum $57° 17' 44''$, fiet æquatio medii periodici temporis imminuti, sive aucti motus medii periodici

$$\frac{9\varphi\delta z^2}{32a^4 M}\left(5+n+\frac{5}{4a^2}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right).\text{sin.}(q-p).360°.\frac{360°}{57° 17' 44''}.$$

Quare si Joviali orbita ad Saturnum relata pro anno 1750. ex Hallejanis tabulis assumatur $q-p=79° 6' 12''$, & $a=0.57$, sitque insuper $\delta=0.057$, $\varphi=0.04822$, $\frac{1}{M}=0.000331$, erit æquatio medii motus Jovis, quæ actione Saturni orietur $1.8''.z^2$. In Planetis aliis inferioribus ob majorem differentiam distantiarum, atque insuper in Terra, & Venere ob exiguam excentricitatem, in Marte vero ob exiguam apsidum distantiam æquatio medii motus genita actione Jovis non poterit esse sensibilis.

Problema XI.

Invenire æquationem temporis periodici Planetæ cujuslibet superioris, quæ pendet similiter ex loco apsidum orbitæ superioris, atque inferioris.

Positis omnibus ut in Probl. XV. Lib. II. si a non veram inferioris Planetæ distantiam a Sole, sed mediam tantum designet, & sit vera distantia $a(1+\varphi.\text{cos}.u)$, superioris autem Planetæ distan-

ſtantia a Sole vocetur x, erit prior terminus vis perturbatricis normaliter ad vectorem radium exercitæ

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{a}{a^2}-\frac{a^2}{x^3}-\frac{3a^3}{8x^3}\right).\text{ſin. STL}$$

$$+\frac{\varphi.\text{coſ.}u}{M}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{a}{x^3}+\frac{9a^3}{8x^5}\right).\text{ſin. STL},$$

& ſi expreſſio anguli, & ſinus STL, ac denominationes aliæ ex Probl. X. accipiantur, in tota vis perpendicularis expreſſione bini occurrent termini

$$\frac{\varphi\delta}{M}\left(\frac{1-n}{a^2}+\tfrac{1}{2}a+an+\tfrac{3}{8}a^3.\overline{n+\tfrac{3}{2}}\right).\text{ſin.}(z-nz+v-u)$$

$$+\frac{\varphi}{M}\left(\frac{1-n}{a^2}+\frac{a+2an}{2x^3}+\frac{3a^3}{8x^5}.\overline{n+\tfrac{3}{2}}\right).\text{ſin.}(z-nz-u).$$

Hic autem poſterior terminus dumtaxat ſi loco ipſius vis perpendicularis accipiatur, & fiat $x=1+\delta.\text{coſ.}\,v$, in reſolutione quantitatis $2\omega x^3.ndz$ alius exſurget terminus

$$\frac{3n\varphi\delta}{M}\left(\frac{1-n}{a^2}-\tfrac{1}{4}a^3.\overline{n+\tfrac{3}{2}}\right).\text{ſin.}(z-nz+v-u),$$

& binis terminis ſimul acceptis fiet $2\omega x^3 ndz=$

$$\frac{n\varphi\delta}{M}\left(\frac{5-5n}{a^2}+a.\overline{1+2n}\right).\text{ſin.}(z-nz+v-u).$$

Quia vero $-\frac{1}{a^2M}$.ſin.STL denotat actionem inferioris Planetæ in Solem, ſi negligatur variatio ipſius actionis, quæ ex varia Planetæ ejuſdem diſtantia a Sole oritur, & quæ compenſari poteſt actionibus aliorum Planetarum ex adverſis partibus jacentium, pro tota vi perturbatrice ab inferiore Planeta in ſuperiorem radio normaliter exercitæ aſſumi poterit dumtaxat

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{n\varphi\delta}{M}\left(\frac{1}{a^2}-a-\frac{3}{8}a^3\right)\\+\frac{\varphi\delta}{2M}\left(a+\frac{9}{8}a^3\right)\end{array}\right\}.\text{ſin.}(z-nz+v-u)$$

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{n\varphi}{M}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{a}{x^3}-\frac{3a^3}{8x^5}\right)\\+\frac{\varphi}{M}\left(\frac{1}{2x^3}+\frac{9a^3}{16x^5}\right)\end{array}\right\}.\text{ſin.}(z-nz-u),$$

atque inde in resolutione quantitatis $2\omega x^3 . n d z$ eadem semper reductionum similium methodo eruemus

$$-\frac{n\varphi\delta}{M}\left(\frac{5n}{a^2} - a . \overline{1+2n}\right). \text{fin.}\,(z - nz + v - u).$$

Quare si loco $z - nz + v - u$ scribamus $p - q$, ut in Probl. XI., simili modo habebimus, pro differentia quidem vectoris radii

$$\frac{n\varphi\delta}{M}\left(\frac{5n}{a^2} - a . \overline{1+2n}\right). \text{fin.}(q-p) . z,$$

pro æquatione vero temporis totius periodici

$$\frac{3n^2\varphi\delta}{4M}\left(\frac{5n}{a^2} - n . \overline{1+2n}\right). \text{fin.}(q-p) . z^2 .$$

Corollarium I.

Si requiratur æquatio, qua tempus periodicum Saturni actione Jovis augeri, & motus medius in integra revolutione imminui debet, posito $n^2 = a^2 = 0.1852$, substitutionibusque aliis ut supra acceptis, fiet medii motus æquatio $-0.000018354 . \text{fin.}(q-p) . z^2$: & si z non jam angulum descriptum circa Solem, sed revolutionum absolutarum numerum designet, pro æquatione hujusmodi prodibunt $-14.5'' . z^2$: nimirum in hypothesi assumpta, & vis a Jove in Solem exercitæ neglecta variatione illa, quæ ex varia Jovis distantia a Sole oritur, medius Saturni motus revolutione integra fiet minor $14.5''$, minueturque universim in duplicata ratione temporum.

Corollarium II.

Generatim vero velocitas projectionis, & radius mediocris orbitæ, ac periodicum tempus in superiori Planeta augebitur, aut minuetur prout aphelium superioris orbitæ juxta signorum ordinem antecedet, vel subsequetur aphelium orbitæ inferioris. Scilicet in iisdem casibus idem tempus augebitur, aut minuetur, in quibus periodicum inferioris Planetæ tempus e contra minuetur, vel augebitur. Et quidem variatio omnis universim erit in duplicata ratione temporum, atque in ratione simplici sinus recti angularis distantiæ apsidum a se invicem: & cum successu temporis $q - p$ fiet major integro semicirculo, & sin. $(q - p)$ contrario signo afficietur, tempus etiam periodicum, quod antea augebatur, imminui incipiet, & vice versa: ac denique continuato motu, integra duarum apsidum revolutione a se invicem, restituentur omnia in statum pristinum.

PRO-

Problema XII.

Dato loco apſidum ſuperioris, & inferioris orbitæ, & data exigua variatione diſtantiæ apſidum a ſe invicem, invenire variationem temporum periodicorum.

Poſitis omnibus ut in Probl. X. fiat $q-p=K+kz$, & ſit K quantitas quæpiam conſtans, quæ mediam exprimat diſtantiam ſummarum apſidum utriuſque orbitæ, kz vero exiguam denotet diſtantiæ ipſius variationem. Aliis omiſſis terminis, quos in priori libri hujus capitulo ſupputavimus, erit

$$2\omega x^3 dz = -A.\text{ſin.}(K+kz).dz = -A.\text{ſin.}(\text{ſin.}K.\text{coſ.}kz+\text{coſ.}K.\text{ſin.}kz).dz,$$

& integralibus ſumptis ad normam priorum lemmatum erit

$$2\int\omega x^3 dz = -\frac{A}{k}(\text{ſin.}K.\text{ſin.}kz+\text{coſ.}K.\overline{1-\text{coſ.}kz})$$

$$= -\frac{A}{k}.\text{coſ.}K+\frac{A}{k}.\text{coſ.}(K+kz) = T.$$

Quo dato erit variatio elementi temporis

$$2T.dz - dz.\int\omega x^3 dz = -\frac{3A}{2k}.(\text{coſ.}K-\text{coſ.}\overline{K+kz}).dz;$$

& ſummis rurſus acceptis fiet tota periodici temporis æquatio

$$-\frac{3Az}{2k}.\text{coſ.}K+\frac{3A}{2k^2}.\text{ſin.}(K+kz)-\frac{3A}{2k^2}.\text{ſin.}K.$$

Jam vero ſi kz quantitas ſatis exigua intelligatur, ſtatui poterit

$$\text{ſin.}(K+kz) = \text{ſin.}K+kz.\text{coſ.}K-\tfrac{1}{2}k^2z^2.\text{ſin.}K.$$

Hac igitur ſubſtitutione facta, atque omiſſis terminis ſe invicem deſtruentibus fiet tota periodici temporis æquatio

$$-\tfrac{3}{4}A.\text{ſin.}K.z^2 = \frac{-9\omega\delta}{32a^4M}.(5+n+\frac{5}{4a^2}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}).\text{ſin.}K.z^2.$$

Simili modo in iiſdem præcedentis problematis hypotheſibus pro æquatione omni periodici temporis Planetæ alterius ſuperioris eruemus

$$\frac{3n^2}{4}\frac{\omega\delta}{M}.(\frac{5n}{a^2}-a.\overline{1+2n}).\text{ſin.}K.z^2.$$

Corollarium.

Eadem itaque habebitur in Planeta inferiori, & ſuperiori æquatio temporis periodici, ac ſi diſtantia ſummarum apſidum utriuſque

que orbitæ maneret constanter eadem. Et quidem perinde est si omnino constans assumatur apsidum distantia, & si distantiæ ipsius variatio statuatur omnino exigua. Cum autem motus aphelii Jovis sit fere 8'' annis singulis, & motus annuus aphelii Saturni fere 14'', adeoque kz sit angulus fere 6'', & sæculis sex opus sit ut ad integrum gradum ascendat; æquatio medii motus Jovis diu assumi poterit $1.8''.z^2$, Saturni vero $-14.5''.z^2$, ac deinde utraque augenda erit in simplici ratione sinus sensibiliter auctæ differentiæ longitudinum Saturni, & Jovis.

PROBLEMA XIII.

Si Planetæ moveantur in medio resistente juxta rationem quamlibet distantiarum a Sole, variationes vectoris radii, & angularis motus inde ortas definire.

Reassumptis omnibus, quæ in Probl. X. Lib. I. velocitas Planetæ ad velocitatem ammissam quo tempore integra diametri longitudo percurritur, se habebit ut $1 : -\frac{3}{8D}$, & si angularis motus sit dz, radius vector x, erit tota eadem velocitas ad velocitatem ammissam quo tempore percurritur arcus xdz ut $1 : -\frac{3xdz}{8DR}$. Est autem tota vis gravitatis $\frac{1}{x^2}$ ad velocitatem perpendicularem radio ut duplus sinus versus ad arcum, sive ut arcus xdz ad radium x: adeoque est velocitas omnis $\frac{1}{x^2 dz}$. Erit ergo $\frac{-3}{8DRx}$ velocitas ammissa ob medii resistentiam: aut si $D:1$ sit ratio densitatis Planetæ ad densitatem medii in ea tantum distantia a Sole, quæ exprimitur unitate; atque universim sit densitatum ratio $Dx^n : 1$, erit vis resistentiæ $\frac{-3}{8DRx^{n+1}}$. Quod si igitur hæc quantitas in æquatione problematis secundi libri hujus loco vis perpendicularis a accipiatur, negliganturque inferiorum ordinum termini, adeoque etiam pars illa totius resistentiæ, quæ opponitur directioni gravitatis, erit æquatio differentialis orbitæ

$$\frac{ddT}{dz^2} + c^2T = -\frac{3x^2}{4DR}.\int x^{-n+2}dz - 2\varphi T.\text{cof.}cz$$
$$-\frac{3\varphi}{8DR}.x^{-n+2}\,\text{fin.}cz - 4\varphi.\text{fin.}cz.\frac{dT}{dz}.$$

Eadem itaque femper ratione invenietur differentia vectoris radii, quæ inducitur ob medii refiftentiam: tota autem, mediique, ac veri motus variatio eruetur ex æquatione alia elementi temporis

$$d\theta = \frac{x^2dz}{1+\int\omega x^2dz} = (1+2\varphi.\text{cof.}cz+2T)\left(1+\frac{3\int x^{-n+2}dz}{8DR}\right).dz.$$

Corollarium I.

Æquationem differentialem confiderando manifeftum erit quod cum pro quovis radii x valore refolutis terminis $-\frac{3x^2}{4DR}\int x^{-n+2}dz - \frac{3\varphi x^{-n+2}}{8DR}.\text{fin.}cz$ nullus alius terminus poffit occurrere, qui differentiam T per conftantes alias quantitates multiplicatam complectatur, fecundus æquationis terminus c^2T manebit idem, atque idem pariter erit aphelii motus, qui coefficiente ejufdem termini definitur: fcilicet ob medii refiftentiam minime mutabitur motus apfidum, qui ex aliis viribus perturbatricibus proficifcitur.

Corollarium II.

Quod fi deinde accipiatur media radii vectoris quantitas, & fiat $x = 1$, pro æquatione omni differentiali habebimus $\frac{ddT}{dz^2} + c^2T = -\frac{3z}{4DR}$, atque inde primum eruetur $T = -\frac{3z}{4c^2DR}$: fcilicet axis major continue minuetur in fimplici ratione anguli circa centrum defcripti, five in ratione fimplici temporis. Inde etiam eruetur $d\theta = dz - \frac{9zdz}{8DR}$, eademque habebitur medii, & veri motus variatio, quæ in Probl. XI. Lib. I. antea prodierat: & iifdem pariter Probl. XII. fubftitutionibus patebit in orbitis Satellitum non motum quidem apfidum variari ob medii refiftentiam, fed axem majorem tantum imminui in fimplici ratione temporis, & motum medium periodicum augeri in ratione temporis duplicata.

Co-

Corollarium III.

Posito autem $T = \frac{-3z}{4c^2DR}$ in priori æquatione differentiali loco $-2\varphi T.\text{cos}.cz - 4\varphi.\text{sin}.cz.\frac{dT}{dz}$ habebimus $\frac{3\varphi}{c^2DR}(\text{sin}.cz + \frac{1}{2}z.\text{cos}.cz)$, adjectoque termino $-\frac{3\varphi.\text{sin}.cz}{8c^2DR}$, & posito $c=1$, atque ut antea neglectis variationibus aliis, quæ ex medii resistentia juxta vectorem radium exercita oriri possent, fiet tota eadem descriptæ orbitæ æquatio

$$\frac{ddT}{dz^2} + T = -\frac{3z}{4DR} + \frac{21\varphi.\text{sin}.z}{8DR} + \frac{3\varphi z.\text{cos}.z}{2DR}.$$

Corollarium IV.

Quod si reassumpto calculo Lem. XII. Lib. I. proponatur æquatio $ddT.\text{cos}.z + T.\text{cos}.z.dz^2 = f.\text{cos}.z.\text{sin}.z.dz^2 = \frac{1}{2}f.\text{sin}.2z.dz^2$, eaque exsurgat ex differentiali alia æquatione $dT.\text{cos}.z + T.\text{sin}.z.dz = \frac{1}{4}f.(1-\text{cos}.2z).dz = \frac{1}{2}f.\text{sin}.z^2.dz$, & divisione per $\text{cos}.z^2$ facta, ac posito $\frac{f.\text{sin}.z^2.dz}{2.\text{cos}.z^2} = \frac{fdz}{2.\text{cos}.z^2} - \frac{1}{2}fdz$, integratione alia eruatur $\frac{T}{\text{cos}.z} = \frac{f.\text{sin}.z}{2.\text{cos}.z} - \frac{1}{2}fz$, erit correcta vectoris radii differentia, quæ ob medii resistentiam induci poterit

$$T = -\frac{3z}{4DR} + \frac{21\varphi}{16DR}(\text{sin}.z - z.\text{cos}.z).$$

Scholion.

Qui singularis hujus phænomeni periodicæ revolutionis in Jove quidem correptæ, in Saturno autem productæ rationem aliquam physicam primus omnium afferre voluit Cassinus in actis Parisiensis Academiæ anni 1746., cum in pluribus orbitarum locis Saturni, & Jovis vires supputasset, deprehendisse sibi visus est velocitatem projectionis Jovis a Saturno augeri semper, & velocitatem Saturni a Jove imminui. Quod quidem si verum esset dilatari potius deberet orbita Jovis, & tempus Jovis periodicum augeri, & contra imminui tempus periodicum Saturni. Leonardus Eu-

Eulerus in opusculo de relaxatione motus Planetarum, ut simul imminuti anni Tropici apparentiis iis satisfaceret, quas libri hujus initio recensuimus, ætherei fluidi resistentiam in medium protulit, assumptisque hypothesibus quibusdam sæcularem periodicorum temporum imminutionem statuit Saturni 33'', Jovis 15'', Martis 1' 2'', Terræ 5'', Veneris 25'', Mercurii 33''. At cum nulla sit certa anni Tropici æquatio, & motus medius Martis, Veneris, & Mercurii satis regularis sit, ut supra jam adnotavimus, tempus autem periodicum Saturni e contra augeatur, patet non nisi Lunæ sæcularem æquationem esse, quæ ex resistentia ætherei fluidi possit repeti.

Idem phænomenon anno 1760. Parisiensis Academia præmio proposito explicandum obtulit, inquisivitque si quæ essent mediorum motuum Planetarum variationes, & qua ex caussa oriri possent. Carolus Eulerus in dissertatione, quæ ab Academia præmium retulit, investigavit potissimum quæ esse possent variationes medii motus Terræ ob vim Cometæ illius, qui anno 1759. apparuit: cumque in æquationem differentialem incidisset ipse, quæ juxta notas methodos ad integrationem deduci nequit, mutationes singulis diebus habitas spectavit veluti totidem differentialia, atque ita supputavit incrementum omne axis transversi terrestris orbitæ. Calculus autem omnis huc redit, quod si massa Cometæ illius fuisset tantum $\frac{1}{27}$ massæ terrestris, anni solaris quantitas integro minuto primo aucta fuisset: unde Cometæ massa minore etiam assumpta Solaris annus ea quantitate auctus prodiisset, quæ observationibus potuisset detegi. Ad calcem tamen totius dissertationis Eulerus nonnulla adjecit, quæ ad propositi phænomeni explicationem pertinebant. Animadvertit enim perturbationes motus Planetarum in orbitis ellipticis serie quadam exprimi, cujus nonnulli termini continent sinum distantiæ aphelii duarum orbitarum, ac semper crescunt, vel decrescunt: addiditque etiam veriationes inde ortas axis tranversi, & periodici temporis pendere ab excentricitate utriusque orbitæ, ac fieri maximas cum binæ apsidum lineæ se intersecant ad rectos angulos. In quibus vero orbitis, & quibus quantitatibus axis transversus, & periodicum tempus augeatur, vel imminuatur, num inde oriantur æquationes periodicorum temporum Saturni, & Jovis, minime author ipse indicavit.

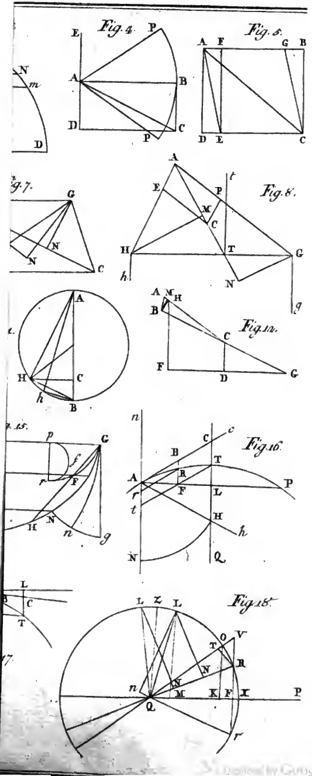
In dissertatione, quam eodem anno ad Parisiensem Academiam transmisi, & quæ proxime accessit ad honorem præmii, veram,

ram, ac generalem protuli totius phænomeni explicationem. Positis enim, ut modo sunt, apsidibus Saturni, & Jovis ostendi mediam Jovis velocitatem imminui Saturni actione, & actione Jovis augeri velocitatem mediam Saturni, ac prioribus serierum terminis supputatis inveni periodicorum temporum variationes inde ortas satis esse sensibiles, ac generatim monui qua positione apsidum, & orbitarum Planetæ cujuslibet inferioris, vel superioris motus medius augeri, aut minui debeat. Eamdem methodum, serie longius perducta, libro tertio de gravitate, & tomo quinto Commentariorum Bononiensium inserui. In dissertatione autem alia de eodem argumento conscripta, quæ anno 1770. a Regia Havniensi Academia præmium retulit, aliam methodum secutus, ex generali æquatione trium corporum se se attrahentium terminum quemdam erui, qui pro argumento habet angularem summarum apsidum distantiam, cujus si exigua etiam variatio aliqua intelligatur, patet adhuc periodicum Jovis tempus imminui, & Saturni tempus augeri in duplicata ratione numeri revolutionum absolutarum. Utramque methodum brevissime expositam coronidis loco hic adjeci, & in corollario Probl. XII. ostendi utramque simul coincidere. Substitutis etiam numeris pro Jove quidem æquationem eamdem obtinui, quam Clariss. la Grange To. III. Academiæ Taurinensis ex nova, atque ingeniosa eruit solutione problematis trium corporum. At pro Saturno cum potius incrementum aliquod medii motus primo videatur colligi, indicavi qua ratione, & qua hypothesi medius motus periodicus minui debeat. Æquationem mediorum motuum, quæ pendet ex nodorum loco, & quam summus idem Geometra invenit esse $\frac{1}{40}$ circiter alterius æquationis, quæ pendet ex loco apsidum, minime supputavi. Hæc pro præsenti operis instituto sufficiant. Brevi alteram Cosmographiæ partem adjiciam, & cum tempus supererit Miscellanea etiam Mathematica aut non adhuc, aut sparsim a me edita simul colligam. Quæ vero, post editum tractatum alium de fluviis, ac torrentibus, & de fossis navigabilibus, a me observata, atque elucubrata sunt, singulari opere complectar.

FINIS TOMI PRIMI.

MEDIOLANI)o(MDCCLXXIV.
SUPERIORUM PERMISSU.

pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
32.	25.	$\sqrt{(1-X)}$	$\sqrt{(1-X^2)}$
33.	7.	$dz.\text{cof.}\, mz$	$\int dz.\text{cof.}\, mz$
	8.	$dz.\text{fin.}\, mz$	$\int dz.\text{fin.}\, mz$
36.	7., & 9	c	$\frac{c}{a}$
	13.	quantitas b	quantitas c
	19.	$2cz^2$	cz^2
69.	31.	$21''.\text{fin.}\, 2Z$	$1'\ 12''.\text{fin.}\, 2Z$
119.	16.	$1\frac{1}{2}n^2$	$1-\frac{1}{2}n^2$
120.	16.	RQ	BQ
121.	19.	2STL	STL
	20.	STL	2STL
157.	21.	0.774	0.774'
198.	12.	$\frac{3}{2}\varphi^2 k$	$\frac{1}{2}\varphi^2 k$
205.	14.		
222.	35.	± 0.0003918	∓ 0.0003918
245.	7.	$21''.\text{fin.}\, 2Z$	$1'\ 12''.\text{fin.}\, 2Z$
253.	20.	$\frac{3a^2n^2\delta}{M}$	$\frac{3a^2n^2\delta}{2M}$


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

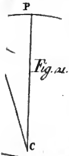


Fig. 21.

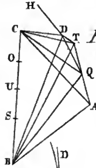


Fig. 22.

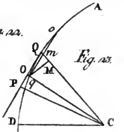
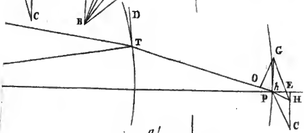


Fig. 23.



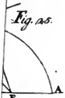
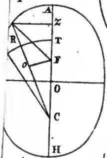


Fig. 25.



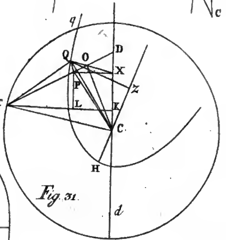


Fig. 31.

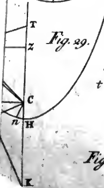


Fig. 29.

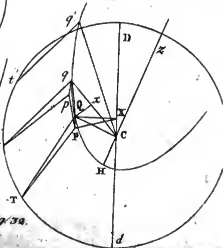
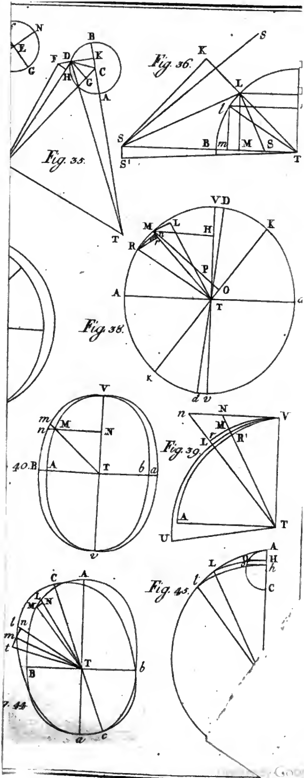


Fig. 32.


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 38.
Fig. 39.
40.
Fig. 45.
Fig. 44